COSMOLOGIE. – *Entropie maximale et univers tournants.* Note (*) de MM. **Jean-Pierre Petit** et **Guy Monnet**, présentée par M. André Lichnerowicz.

Dans ce travail la solution maxwellienne instationnaire générale, satisfaisant aux équations de Vlasov et de Poisson est développée. Il apparait que cette solution est nécessairement homogène en température et en densité. Le champ de vitesse macroscopique est une superposition du champ de Hubble et d'un mouvement instationnaire de rotation en corps solide où la vitesse angulaire varie comme la température. La dimension caractéristique R de ce système newtonien obéit à une pseudo équation de Friedman déjà obtenue par Heckman et Sücking [2]. La cosmologie newtonienne est donc réétablie dans une approche où l'on tient compte explicitement de la nature corpusculaire de la matière.

Dans une Note précédente [1] une solution maxwellienne instationnaire de l'équation de Vlasov avait été analysée, où l'on négligeait la composante de rotation du mouvement macroscopique. Nous reprenons ici cette étude dans toute sa généralité. La méthode utilisée est la même que celle qui a été développée dans la Note précédente, les notations également. Ici encore nous trouvons une température constante à travers tout l'espace, et un champ de vitesse macroscopique correspondant à

$$\mathbf{C}_0 = -\frac{1}{2\mathrm{T}}\frac{d\mathrm{T}}{dt}\mathbf{r}+\omega(t)\,\mathbf{k}\times\mathbf{r} \equiv \dot{\Phi}\,\mathbf{r}+\omega(t)\,\mathbf{k}\times\mathbf{r}, \tag{1}$$

Où **k** désigne le vecteur (0, 0, 1). Nous voyons donc qu'au champ de Hubble se superpose un mouvement de rotation instationnaire en corps solide, c'est-à-dire sans cisaillement. L'équation aux termes d'ordre unité, où intervient le potentiel gravitationnel ψ s'écrit :

$$\frac{m}{k\mathrm{T}}\left[\frac{\partial\psi}{\partial r}+(\ddot{\Phi}+\dot{\Phi}^2)\,\mathbf{r}+(\dot{\omega}+2\,\dot{\Phi}\omega)\,\mathbf{k}\times\mathbf{r}-\rho\omega^2\right]+\frac{\partial\,\mathrm{Log}\,n}{\partial\mathbf{r}}=0. \tag{2}$$

En projetant sur l'axe azimuthal, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{m\psi}{k\mathrm{T}}+\mathrm{Log}\,n\right]=-\frac{m}{k\mathrm{T}}(\dot{\omega}+2\,\dot{\Phi}\,\omega)\,\rho^2. \tag{3}$$

Si ψ et n varient suivant θ, ils doivent être nécessairement périodiques.

Ce qui entraîne :

$$\dot{\omega}+2\,\dot{\Phi}\,\omega=0, \tag{4}$$

où $\omega = \lambda\,\mathrm{T}$. λ étant une constante absolue. Nous trouvons ainsi que la vitesse angulaire du système varie comme la température T. En posant :

$$\psi_1=(\ddot{\Phi}+\dot{\Phi}^2)\frac{r^2}{2}-\frac{1}{2}\rho^2\,\omega^2, \tag{5}$$

nous obtenons, après intégration :

$$n = n_0(t)\,\exp\,-\frac{m}{k\mathrm{T}}(\psi+\psi_1). \tag{6}$$

Le potentiel gravitationnel étant défini à une fonction du temps près, donnons nous la condition :

Ainsi $n_0(t)$ qui apparaît dans l'intégration, devient la densité de particules au point $\mathbf{r} = 0$. L'équation aux termes d'ordre 0 s'écrit par ailleurs :

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{n}{\mathrm{T}^{3/2}}\right) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{C}_0 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\left(\frac{n}{\mathrm{T}^{3/2}}\right) = 0 \tag{7}$$

qui traduit l'adiabaticité du système. Cette équation permet immédiatement de relier $n_0(t)$ et T. En faisant maintenant intervenir l'équation de Poisson et en passant en variables adimensionnelles nous obtenons le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{ll} (8) & \dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(e^{3\varphi}\,\Delta\psi) = 0, \\ (9) & \Delta\psi = e^{-3\Phi}\exp\{-e^{2\Phi}(\psi+\psi_1)\} \end{array}\right.$$

La solution $\psi = -\psi_1$ apparaît d'emblée. Elle conduit à un système tel que : $\partial n/\partial \mathbf{r} = 0$.

On trouve immédiatement l'équation d'évolution suivante :

$$(\ddot{\Phi}+\dot{\Phi}^2)\,e^{3\Phi} + \frac{1}{3} - \frac{2\lambda^2}{3}e^{-\Phi} = 0. \tag{10}$$

La forme de l'équation (1) fait que la dimension caractéristique R de ce système newtonien varie comme e^{Φ} et nous trouvons, partant de l'équation (10) :

$$\boxed{\mathrm{R}^2\,\ddot{\mathrm{R}} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\,\frac{\lambda^2}{\mathrm{R}} = 0.} \tag{11}$$

En faisant λ nul, on retrouve l'équation de Friedman, et bien entendu le résultat de la Note précédente. L'équation (11) s'identifie avec ce que Heckman et Sücking ([2]) appellent la pseudo-équation de Friedman, ceci pour une valeur nulle de la constante cosmologique Λ.

Il convient maintenant d'examiner si la solution $\psi = -\psi_1$ est unique. Pour ce faire, posons :

$$\psi = -\psi_1 + \varphi(\rho, \theta, z, t). \tag{12}$$

Il vient :

$$\left\{\begin{array}{ll} (13) & e^{3\Phi}\Delta\psi = \exp-(e^{2\Phi}\varphi), \\ (14) & \dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(e^{3\Phi}\,\Delta\psi) = 0. \end{array}\right.$$

D'où on extrait le système équivalent :

$$\left\{\begin{array}{ll} (15) & \dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(e^{2\Phi}\varphi) = 0, \\ (16) & \dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(e^{3\Phi}\,\Delta\psi) = 0\,. \end{array}\right.$$

Posons $e^{2\Phi}\,\varphi \equiv \chi$, d'où $e^{2\Phi}\,\Delta\,\varphi \equiv \Delta\,\chi$.

Il vient

$$\left\{\begin{array}{ll} (17) & \dfrac{D\chi}{Dt} = 0, \\ (18) & \dfrac{D}{Dt}(e^{3\varphi}\,\Delta\varphi) - \dfrac{d}{dt}(e^{3\varphi}\,\Delta\psi_1) = 0 \end{array}\right.$$

en tenant compte de ce que

$$\frac{D}{Dt}\Delta\chi \equiv \Delta\frac{D\chi}{Dt} = 0.$$

Il apparaît que $\Delta\,\chi$ donc $\Delta\,\varphi$ ne peuvent être fonctions que du temps. Dans toute sa généralité la solution maxwellienne obéit donc à $\partial n/\partial \mathbf{r} = 0$; comme

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\left(\frac{m\varphi}{k\,T} + \log n\right) = 0,$$

le potentiel φ est donc fonction de la seule variable t. Ainsi $\Delta\,\varphi = 0$. Ce qui entraîne que

$$\frac{d}{dt}(e^{3\Phi}\Delta\psi_1) = 0$$

cette relation étant satisfaite du fait de (10).

Conclusion. — Lorsqu'on suppose, dans un système de particules obéissant aux équations de Vlasov et de Poisson, que l'entropie est maximale en tout point, il apparaît que le champ de vitesse macroscopique $\mathbf{C}_0$ est une superposition du champ de Hubble et d'un mouvement de rotation en corps solide, instationnaire. La densité de particules et la température ne dépendent que du temps. La vitesse angulaire varie comme la température. La dimension caractéristique R de ce système newtonien évolue suivant l'équation (11), résultat qui s'identifie à celui de Heckman et Sücking [2], lorsqu'on adopte une valeur nulle pour la constante cosmologique. Un des aspects intéressants de cette étude cosmologique newtonienne est de s'appuyer sur un formalisme qui rend compte de la nature corpusculaire de la matière.

(*) Séance du 5 mai 1975.

[1] J.-P. Petit et G. Monnet, *Comptes rendus*, 280, série A, 1975, p. 1245.
[2] O. Heckman et E. Schücking, *World Models*, S. E. U., 1958, p. 149-159 (Congrès Solvay).
[3] J. Merleau-Ponty, *Cosmologie du* XX^e *siècle*, Gallimard, 1965.

Observatoire de Marseille,
1, *place Le Verrier,*
13000 *Marseille.*