L'inversion de masse dans les étoiles à neutrons déstabilisées : une alternative au modèle du trou noir.

J.P. Petit

PREMIÈRE PARTIE

Keywords: Black hole, Einstein field equations, Schwarzschild metric.

Abstract: Dans cette première partie, à travers un rappel historique, documenté, on présente la solution de Karl Schwarzschild telle qu'elle a été envisagée par celui-ci, ainsi que par Johannes Droste, Hermann Weyl, et par Albert Einstein, sous sa forme linéarisée. On présente également la façon dont David Hilbert envisagea cette question, avec un temps propre imaginaire pur. Enfin, on évoque les extensions de la solution effectuées à travers des prolongements analytique et leurs implications sur le plan géométrique.

Introduction

Le modèle du trou noir reste une croyance, au sein de la communauté scientifique internationale.

Dans l'histoire des sciences, récente, on a conjecturé l'existence de nombre d'objets et de phénomènes, bien avant qu'on ne les observe. Les exemples sont nombreux, et avaient de quoi susciter un grand scepticisme de la part des scientifiques. Il y a l'exemple de l'antimatière, dont l'existence a été imaginée par Sir Arthur Schuster en 1898, théorisée par Paul Dirac en 1928, avant que les premiers positrons soient détectés en 1932. Plus tard, le phénomène décrit en 1935 par Einstein, Podolsky et Rosen, présenté sous le nom de paradoxe EPR du nom de leurs initiales, sera mis en évidence des décennies après que ses auteurs l'aient présenté comme une dénonciation de l'infaillibilité de la Mécanique Quantique.

L'astrophysicien américano-suisse Fritz Zwicky, au cours d'une conférence mémorable au Caltech en 1931, propose le schéma d'une fin extrêmement violente, concernant les étoiles de forte masse. Selon lui l'étoile, tombant brusquement en panne de carburant de fusion, s'effondrerait sur elle-même à une vitesse hallucinante, convertissant son énergie potentielle en énergie cinétique. Cette masse de matière entraînerait une compression brutale du noyau de fer central, transformant celui-ci en un objet totalement nouveau : une étoile à neutrons.

Ce modèle est accueilli avec un scepticisme quasi général. Très peu de scientifiques adhèrent à une idée aussi singulière. Au prix d'un énorme travail, Zwicky mettra le phénomène en évidence, très progressivement.

Aujourd'hui, personne ne se hasarderait à mettre en doute l'existence de l'antimatière, ou celle du phénomène EPR, ou encore celle des supernovæ. S'agissant des phénomènes astronomiques, la situation est très simple. Le cosmos est vaste. Si le phénomène de supernova ne se produit statistiquement dans notre galaxie qu'au rythme d'un par siècle, si on étend l'investigation à toutes les galaxies accessibles, leur nombre passe à des dizaines de milliers.

Liée à cette question des supernovæ, se trouvait celle de l'existence d'étoiles à neutrons. On découvrit les premières en 1967, en tant que sources de rayonnement pulsé. Le lien avec le phénomène de supernova fur vite établi, une de ces sources se situant au centre de la nébuleuse du crabe, reste d'une supernova dont l'explosion avait été consignée par les Chinois en 1054. Aujourd'hui leur nombre se chiffre en centaines, dans tous les coins de notre galaxie, y compris à des distances relativement proches. Aucun scientifique raisonnable ne se hasarderait aujourd'hui à publier un article mettant leur existence en doute.

Ça n'est pas le cas concernant les trous noirs stellaires dont l'existence ne s'appuie pratiquement que sur un unique cas, celui de la formation binaire Cygnus X-1, dont on évalue la distance par rapport à nous à 6000 années-lumière. Cette rareté est parfaitement anormale. À une telle distance, l'évaluation de la masse, quelques huit masses solaires, peut découler du cumul des erreurs observationnelles.

Cette situation parfaitement anormale donne à cet objet hypothétique la nature d'une simple croyance, ce qui est contraire à une attitude scientifique.

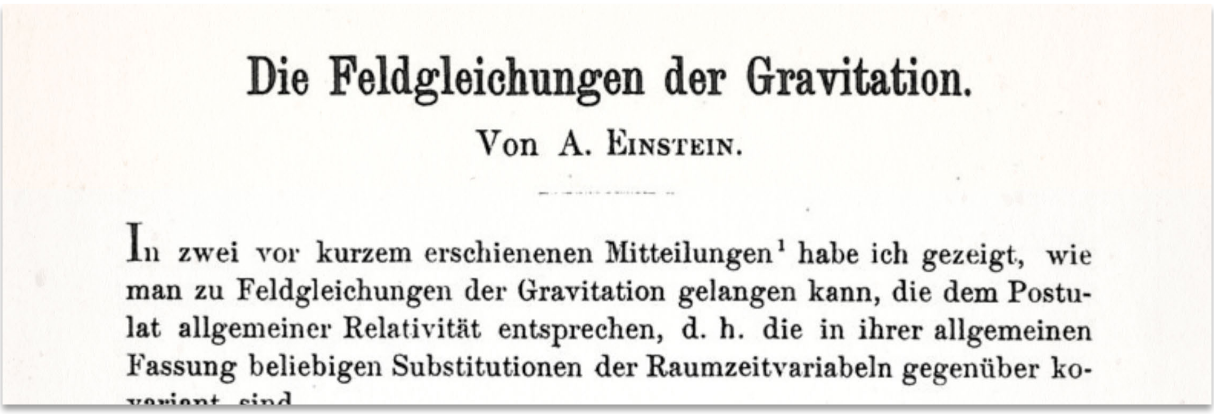
Quant aux trous noirs supermassifs, tout ce qu'on peut dire pour le moment c'est qu'il s'agit de concentrations de matière très importantes, situées au centre des galaxies. Cette énorme masse est répartie selon une densité relativement faible. Celle située au centre de notre Voie lactée peut être représentée par exemple par une sphère ayant un diamètre équivalent à la moitié de celui du système solaire, empli d'une matière ayant la densité de l'eau. Il s'agit en tout état de cause d'objets nouveaux, qui pourraient être le reliquat de phénomènes quasar, mais leur signature ne permet pas, en l'état, de leur attribuer le nom de trous noirs.

Il est donc parfaitement licite aujourd'hui de remettre en question le modèle du trou noir, tout en proposant un scénario alternatif quand, dans le cas d'une binaire X, une étoile à neutrons capte de la matière issue d'une étoile compagne, et se trouve ainsi déstabilisée. Refuser une telle démarche serait non scientifique et équivaudrait à la défense d'un dogme.

Prélude à la naissance du modèle du trou noir.

Avant d'entrer dans le détail de cette histoire, il convient de situer le contexte dans lequel Schwarzschild a produit pour la première fois une solution non-linéaire de l'équation d'Einstein, en 1916. Dans l'imaginaire du public, les médias américains ont fait d'Einstein une sortie de super-héros, unique en son genre. En fait, grâce à sa remarquable capacité d'assimiler à la fois les mathématiques de son époque et la palette des phénomènes physiques, il a pu produire une succession impressionnante de résultats, dont par exemple, en 1905, la découverte de la loi expliquant l'effet photoélectrique. Mais à cette époque, nombre de scientifiques allemands et hollandais suivaient cette voie avec attention et étaient immédiatement capables de comprendre et d'interpréter toute avancée effectuée. Schwarzschild était l'un de ceux-là.

En 1915 nous trouvons d'abord des textes importants qui résultent d'une collaboration-compétition entre Einstein et le grand mathématicien Hilbert. En novembre 1915 Einstein présente, à l'Académie royale des sciences de Prusse à Berlin, une version finalisée de sa théorie de la relativité générale dans une série de quatre papiers [1] [2] [3] [4]. Au départ, son équation de champ n'est alors pas à divergence nulle, mais il a l'intuition qu'à petite distance et pour des vitesses modérées (ce qui correspond à l'approximation newtonienne) son équation doit redonner les équations correspondantes de la mécanique des fluides, à savoir les équations d'Euler. Il modifie son équation pour la rendre non divergente dans [4], dont voici le titre original :



Die Feldgleichungen der Gravitation.

Von A. Einstein.

In zwei vor kurzem erschienenen Mitteilungen[1] habe ich gezeigt, wie man zu Feldgleichungen der Gravitation gelangen kann, die dem Postulat allgemeiner Relativität entsprechen, d. h. die in ihrer allgemeinen Fassung beliebigen Substitutionen der Raumzeitvariabeln gegenüber kovariant sind.

Fig. 1 – L'article original d'Einstein du 25 novembre 1915
"The Field Equations of Gravitation."

Et voici l'équation correspondante :

feldes bezeichnen.

Ist in dem betrachteten Raume »Materie« vorhanden, so tritt deren Energietensor auf der rechten Seite von (2) bzw. (3) auf. Wir setzen

$$G_{im} = -\varkappa\left(T_{im} - \frac{1}{2} g_{im} T\right), \qquad (2a)$$

wobei

$$\sum_{\varrho\sigma} g^{\varrho\sigma} T_{\varrho\sigma} = \sum_{\sigma} T_{\sigma}^{\sigma} = T \qquad (5)$$

gesetzt ist; T ist der Skalar des Energietensors der »Materie«, die rechte Seite von (2a) ein Tensor. Spezialisieren wir wieder das Koordinatensystem in der gewohnten Weise, so erhalten wir an Stelle von (2a) die äquivalenten Gleichungen

$$R_{im} = \sum_{l} \frac{\partial \Gamma_{im}^{l}}{\partial x_l} + \sum_{\varrho l} \Gamma_{i\varrho}^{l} \Gamma_{ml}^{\varrho} = -\varkappa\left(T_{im} - \frac{1}{2} g_{im} T\right) \qquad (6)$$

$$\sqrt{-g} = 1. \qquad (3a)$$

Wie stets nehmen wir an, daß die Divergenz des Energietensors der Materie im Sinne des allgemeinen Differentialkalkuls verschwinde

Fig. 2 – L'équation de champ finalisée par Einstein le 25 novembre 1915.

Dans le premier membre de son équation (6) : le tenseur de Ricci.

Ci-après, la traduction en anglais datant de 1997 : [4]

which quantities we call the components of the gravitational field.

When there is "matter" in the space under consideration, its energy tensor occurs on the right-hand sides of (2) and (3), respectively. We set

$$G_{im} = -\kappa\left(T_{im} - \frac{1}{2} g_{im} T\right), \qquad (2a)$$

divergenceless form

where

$$\sum_{\rho\sigma} g^{\rho\sigma} T_{\rho\sigma} = \sum_{\sigma} T_{\sigma}^{\sigma} = T. \qquad (5)$$

T is the scalar of the energy tensor of "matter," and the right-hand side of (2a) is a tensor. If we specialize the coordinate system again in the familiar manner, we get in place of (2a) the equivalent equations

$$R_{im} = \sum_{l} \frac{\partial \Gamma_{im}^{l}}{\partial x_l} + \sum_{\rho l} \Gamma_{i\rho}^{l} \Gamma_{ml}^{\rho} = -\kappa\left(T_{im} - \frac{1}{2} g_{im} T\right) \qquad (6)$$

Einstein's constant

$$\sqrt{-g} = 1. \qquad (3a)$$

We assume, as usual, that the divergence of the energy tensor of matter vanishes when taken in the sense of the general differential calculus (energy-momentum

Fig. 3 – Traduction en Anglais de l'article fondateur d'Einstein.
L'équation de champ à divergence nulle après la retouche du 25 novembre 1915.

Einstein est évidemment intéressé par les phénomènes que la mécanique newtonienne ne sait gérer. Il publie alors le 18 novembre 1915 une solution linéarisée de l'équation sans second membre, qui se résume à la nullité du tenseur de Ricci. [3]

Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie.

Von A. Einstein.

In einer jüngst in diesen Berichten erschienenen Arbeit, habe ich Feld-gleichungen der Gravitation aufgestellt, welche bezüglich beliebiger

Fig. 4 – Einstein explique l'avance du périhélie de Mercure.

Dans cette solution, il choisit d'emblée de donner au déterminant de sa métrique-solution une valeur −1, hypothèse que Schwarzschild reprendra.

832 Gesamtsitzung vom 18. November 1915

§ 1. Das Gravitationsfeld.

Aus meinen letzten beiden Mitteilungen geht hervor, daß das Gravitationsfeld im Vakuum bei geeignet gewähltem Bezugssystem folgenden Gleichungen zu genügen hat

$$\boxed{\sum_\alpha \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \sum_{\alpha\beta} \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \Gamma^\beta_{\nu\alpha} = 0,} \qquad (1)$$

wobei die $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ durch die Gleichung definiert sind

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = -\left\{ {\mu\nu \atop \alpha} \right\} = -\sum_\beta g^{\alpha\beta} \left[{\mu\nu \atop \beta} \right] = -\frac{1}{2} \sum_\beta g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \right).$$

Machen wir außerdem die in der letzten Mitteilung begründete Hypothese, daß der Skalar des Energietensors der »Materie« stets verschwinde, so tritt hierzu die Determinantengleichung

$$\boxed{|g_{\mu\nu}| = -1.} \qquad (3)$$

Es befinde sich im Anfangspunkt des Koordinatensystems ein Massenpunkt (die Sonne). Das Gravitationsfeld, welches dieser Massen-

Fig. 5 – Équation de champ sans second membre et valeur −1 au déterminant.

Il convient de mentionner, et ceci aura de l'importance par la suite, qu'Einstein optera pour une signature de métrique qui donne à la variable temps des valeurs réelles, de même qu'au temps propre :

ohne mich auf die Frage einzulassen, ob es die einzig mögliche sei.

Wir gehen nun in solcher Weise vor. Die $g_{\mu\nu}$ seien in »nullter Näherung« durch folgendes, der ursprünglichen Relativitätstheorie entsprechende Schema gegeben

$$\left.\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{matrix}\right\}, \qquad (4)$$

oder kürzere

$$\left.\begin{matrix} g_{\rho\sigma} = \delta_{\rho\sigma} \\ g_{\rho 4} = g_{4\rho} = 0 \\ g_{44} = 1 \end{matrix}\right\}. \qquad (4a)$$

Hierbei bedeuten ρ und σ die Indizes 1, 2, 3; $\delta_{\rho\sigma}$ ist gleich 1 oder 0, je nachdem $\rho = \sigma$ oder $\rho \neq \sigma$ ist.

Fig. 6 – Le choix d'Einstein de la signature de la métrique (+ – – –).

La solution de son équation de champ est une hypersurface à quatre dimensions. Il est clair que son choix de variable se situe dans $\mathbb{R}^4$ et que son élément de longueur *ds* est réel.

Dans l'extrait ci-après, il situe une expression approchée du potentiel métrique g_{44} , introduisant une quantité α , lettre grecque que choisira Schwarzschild pour désigner la constant d'intégration de sa solution non linéaire de janvier 1916.

Erste Approximation.

Es ist leicht zu verifizieren, daß in Größen erster Ordnung den Gleichungen (1) und (3) sowie den eben genannten 4 Bedingungen genügt wird durch den Ansatz

$$\left.\begin{matrix} g_{\rho\sigma} = -\delta_{\rho\sigma} + \alpha\left(\dfrac{\partial^2 r}{\partial x_\rho \partial x_\sigma} - \dfrac{\delta_{\rho\sigma}}{r}\right) = -\delta_{\rho\sigma} - \alpha\dfrac{x_\rho x_\sigma}{r^3} \\ \boxed{g_{44} = 1 - \dfrac{\alpha}{r}} \end{matrix}\right\}. \qquad (4b)$$

Die $g_{4\rho}$ bzw. $g_{\rho 4}$ sind dabei durch Bedingung 3 festgelegt. r bedeutet die Größe $+\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, α eine durch die Sonnenmasse bestimmte Konstante.

Fig. 7 – L'approximation d'Einstein, solution linéarisée de son équation de champ.

Les lettres x_1, x_2, x_3 désignent les coordonnées d'espace, réelles, à partir desquelles il désigne comme coordonnée polaire $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

À l'aide des coordonnées polaires, il retrouve la loi des aires newtonienne :

Diese Gleichungen zeigen, daß man für eine erste Näherung $s = x_4$ setzen kann. Dann sind die ersten drei Gleichungen genau die Newtonschen. Führt man in der Bahnebene Polargleichungen r, ϕ ein, so liefern der Energie- und der Flächensatz bekanntlich die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}u^2 + \Phi &= A \\ r^2 \frac{d\phi}{ds} &= B \end{aligned}\right\}, \qquad (8)$$

Sitzungsberichte 1915. 82

Fig. 8 – Einstein : loi des aires (deuxième loi de Kepler).

C'est lui qui, en passant de la variable r à son inverse $1/r$ exprime la forme de la géodésique-solution :

838 Gesamtsitzung vom 18. November 1915

Der vom Radiusvektor zwischen dem Perihel und dem Aphel beschriebene Winkel wird demnach durch das elliptische Integral

$$\phi = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2A}{B^2} + \frac{\alpha}{B^2}x - x^2 + \alpha x^3}},$$

wobei α_1 und α_2 diejenigen Wurzeln der Gleichung

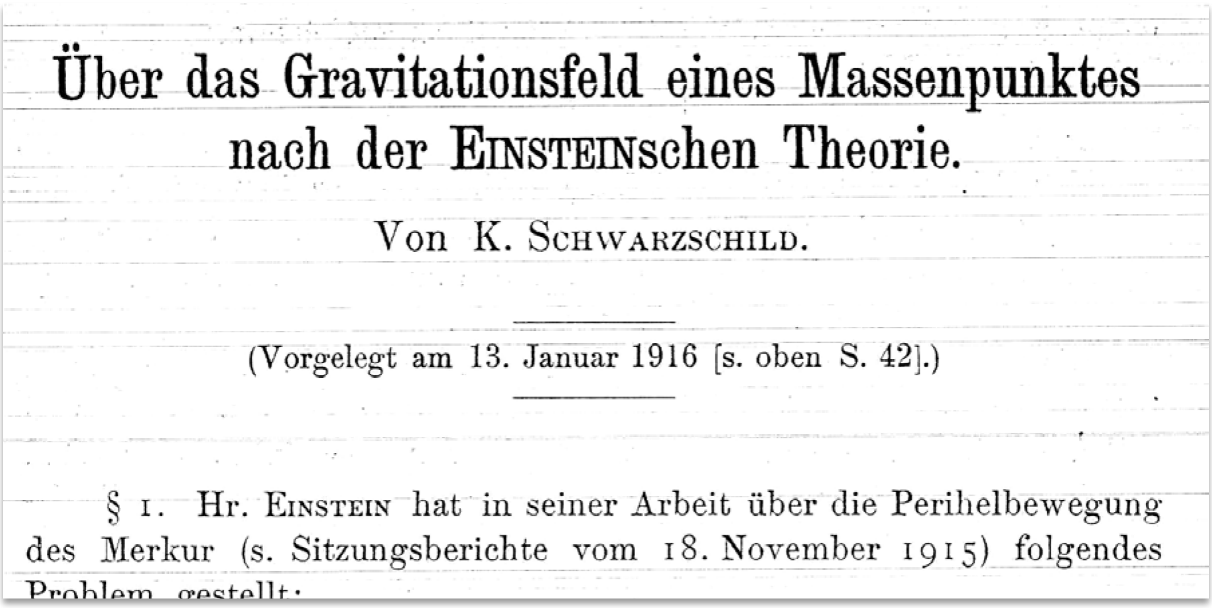
Fig. 9 – La quasi-ellipse solution.

Si on veut coller avec la chronologie, on doit mentionner la communication présentée par le grand mathématicien Hilbert à l'Académie des sciences de Göttingen lors de la séance du 20 novembre 1915. [5] Celui-ci a été progressivement passionné par l'idée d'une possible mathématisation de la physique à travers une approche variationnelle. Il présente donc cette année-là un premier papier intitulé "Fondements de la Physique", extrêmement ambitieux. À l'époque la physique se résume à deux ensembles : la gravitation et l'électromagnétisme. Tout le monde pense que celui qui arrivera à unir ces deux mondes dans ce qu’on appellera plus tard une "théorie des champs unifiés" maitrisera l’ensemble de la physique de son temps. C’est donc le sens du papier de Hilbert.

Ce travail sera poursuivi par Einstein, qui échouera également dans cette entreprise. On sait aujourd’hui que pour unir gravitation et électromagnétisme, quatre dimensions ne suffisent pas. Pour commencer il en faut une cinquième, la dimension de Kaluza.

Mais très rapidement, Hilbert ne n’estime pas satisfait de son article et décide de le retirer pour y apporter des modifications.[1] Comme on le verra par la suite, il présentera une seconde communication en décembre 1916 [6] et c’est cette version que nous commenterons, finalement assez peu différente de la première.

À cette époque, Karl Schwarzschild, âgé de 43 ans et déjà père de trois enfants, s’est engagé avec le grade de lieutenant, par patriotisme, pour aller combattre sur le front russe. C’est déjà un astronome et un mathématicien confirmé. Prenant connaissance de l’article d’Einstein, il publie en janvier et février 1916, non pas un article, mais deux, où il présente sa solution non-linéaire de l’équation de champ. [7] [8] Voici le titre du premier papier :



Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie.

Von K. Schwarzschild.

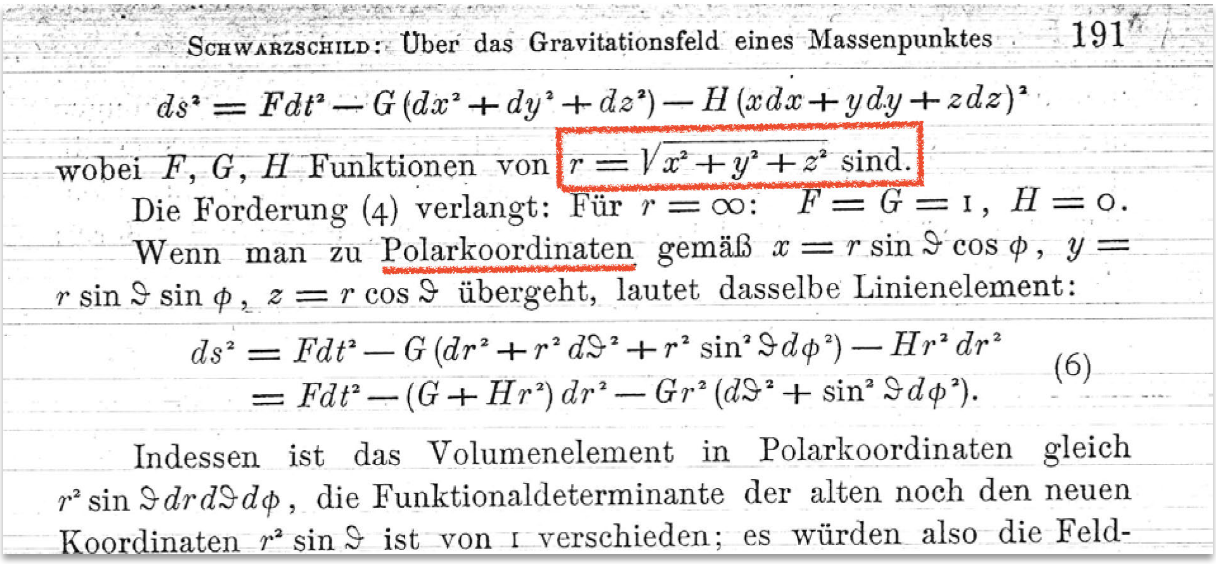
(Vorgelegt am 13. Januar 1916 [s. oben S. 42].)

§ 1. Hr. Einstein hat in seiner Arbeit über die Perihelbewegung des Merkur (s. Sitzungsberichte vom 18. November 1915) folgendes Problem gestellt:

Fig. 10 – Premier papier de Schwarzschild le 13 janiver 1916
"On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory"

[1] Bien qu'ayant présenté sa communication à la séance du 20 novembre 1915, Hilbert empêchera sa publication afin d'y apporter des modifications. Il changera notamment l'équation de champ a posteriori, afin d'utiliser la version à divergence nulle présentée le 25 novembre par Einstein. La version finale de son papier sera publiée en 1916, en conservant la date du 20 novembre 1915. Hilbert n'a donc pas "inventé l'équation de champ" cinq jours avant Einstein comme on peut parfois naïvement l'entendre.

Il situe tout de suite sa solution en choisissant des coordonnées :


Schwarzschild: Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes 191

$$ds^2 = Fdt^2 - G(dx^2 + dy^2 + dz^2) - H(xdx + ydy + zdz)^2$$

wobei F, G, H Funktionen von $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ sind.

Die Forderung (4) verlangt: Für $r = \infty$: $F = G = 1$, $H = 0$.

Wenn man zu Polarkoordinaten gemäß $x = r \sin\vartheta \cos\phi$, $y = r \sin\vartheta \sin\phi$, $z = r \cos\vartheta$ übergeht, lautet dasselbe Linienelement:

$$\begin{aligned} ds^2 &= Fdt^2 - G(dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta d\phi^2) - Hr^2 dr^2 \\ &= Fdt^2 - (G + Hr^2)dr^2 - Gr^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\phi^2). \end{aligned} \quad (6)$$

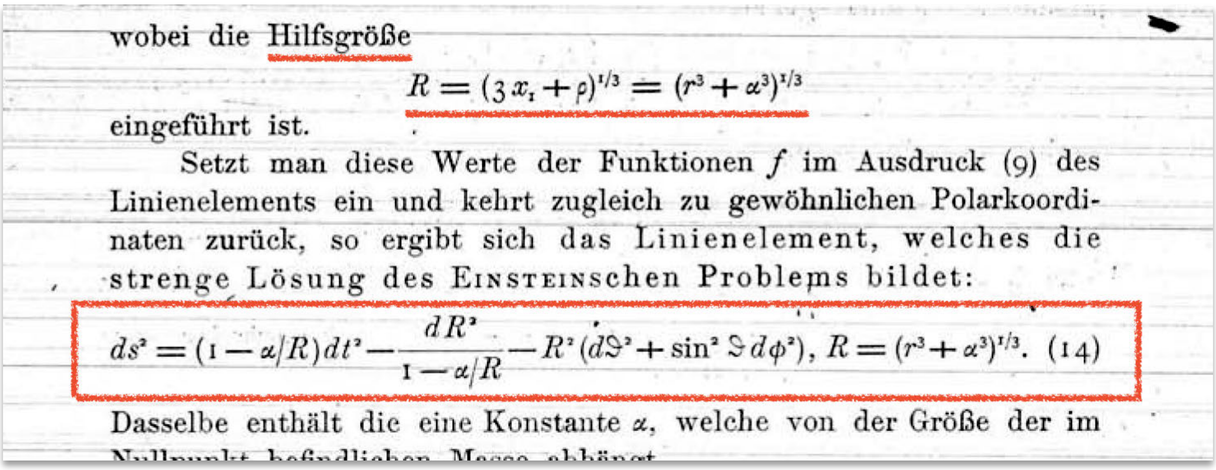
Indessen ist das Volumenelement in Polarkoordinaten gleich $r^2 \sin\vartheta dr d\vartheta d\phi$, die Funktionaldeterminante der alten noch den neuen Koordinaten $r^2 \sin\vartheta$ ist von 1 verschieden; es würden also die Feld-

Fig. 11 – Schwarzschild définit ses coordonnées.

"*One calls **t** the time and **x**, **y**, **z** the rectangular coordinates*". Ces coordonnées sont réelles. S'il avait opté pour des coordonnées pouvant prendre des valeurs imaginaires, il l'aurait mentionné. Ainsi il opte pour une représentation dans $\mathbb{R}^3$. Puis il passe à un système de coordonnées polaires en écrivant $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ avec

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ce qui implique $r \geq 0$, du moins dans le choix d'une représentation où les variables (x , y , z) appartiennent à $\mathbb{R}$. À ce stade, il convient de remarquer que *r* n'est nullement une distance radiale, mais un simple *space marker*, un simple nombre. Schwarzschild introduit alors ce qu'il qualifie de "auxiliary quantity" (*Hilfsgröße*) :


wobei die Hilfsgröße

$$R = (3x_1 + \rho)^{1/3} = (r^3 + \alpha^3)^{1/3}$$

eingeführt ist.

Setzt man diese Werte der Funktionen f im Ausdruck (9) des Linienelements ein und kehrt zugleich zu gewöhnlichen Polarkoordinaten zurück, so ergibt sich das Linienelement, welches die strenge Lösung des Einsteinschen Problems bildet:

$$\boxed{ds^2 = (1 - \alpha/R)dt^2 - \frac{dR^2}{1 - \alpha/R} - R^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\phi^2), \quad R = (r^3 + \alpha^3)^{1/3}. \quad (14)}$$

Dasselbe enthält die eine Konstante α, welche von der Größe der im Nullpunkt befindlichen Masse abhängt.

Fig. 12 – L'expression de la solution à l'aide d'une auxiliary quantity *R*.

Ce faisant, il appelle α sa constant d'intégration, pour recoller avec la présentation faite par Einstein dans le papier [3] de 1915. C'est alors avec ce jeu de variables $\{t, R, \theta, \varphi\}$ qu'il calcule les géodésiques. Comme Einstein, il remarque que celles-ci s'inscrivent dans des plans et il choisit, comme lui, le plan $\theta = \pi/2$. C'est encore avec cette "auxiliary quantity" R qu'il exprime la loi des aires :

abhängig von t und von ϕ sind, ergeben sich bei der Variation sofort drei intermediäre Integrale. Beschränkt man sich gleich auf die Bewegung in der Äquatorebene ($\vartheta = 90°$, $d\vartheta = 0$), so lauten diese intermediären Integrale:

$$(1-\alpha/R)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \frac{1}{1-\alpha/R}\left(\frac{dR}{ds}\right)^2 - R^2\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = \text{const.} = h, \quad (15)$$

$$R^2\frac{d\phi}{ds} = \text{const.} = c, \quad (16)$$

$$(1-\alpha/R)\frac{dt}{ds} = \text{const.} = 1 \quad \text{(Festlegung der Zeiteinheit).} \quad (17)$$

Daraus folgt

$$\left(\frac{dR}{d\phi}\right)^2 + R^2(1-\alpha/R) = \frac{R^4}{c^2}[1-h(1-\alpha/R)]$$

oder für $1/R = x$

$$\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 = \frac{1-h}{c^2} + \frac{h\alpha}{c^2}x - x^2 + \alpha x^3. \quad (18)$$

Führt man die Bezeichnungen: $\frac{c^2}{h} = B$, $\frac{1-h}{h} = 2A$ ein, so ist dies identisch mit Hrn. Einsteins Gleichung (11) a. a. O. und gibt die beobachtete Anomalie des Merkurperihels.

Überhaupt geht hiernach Hrn. Einsteins Annäherung für die Bahn-

Fig. 13 – Schwarzschild calcule les géodésiques $\Phi_{(R)}$: eq. (18)

Même chose avec l'équation (18) pour l'expression de la solution sous la forme d'une intégrale fondée, comme dans l'article d'Einstein, sur la variable $x = 1/r$, et non sur la variable r. Il est clair qu'il oriente l'expression de sa solution pour coller au plus près avec le résultat d'Einstein.

Mais ce détail est pour lui secondaire, dans la mesure où dans les conditions de l'astronomie planétaire, ces deux quantités sont pratiquement égales, ce qu'il note un peu plus loin (*Es ist also praktisch R mit r identisch*) :

> Führt man die Bezeichnungen: $\frac{\ }{h} = B$, $\frac{\ }{h} = 2A$ ein, so ist dies identisch mit Hrn. Einsteins Gleichung (11) a. a. O. und gibt die beobachtete Anomalie des Merkurperihels.
>
> Überhaupt geht hiernach Hrn. Einsteins Annäherung für die Bahnkurve in die strenge Lösung über, wenn man nur statt r die Größe
>
> $$\boxed{R = (r^3 + \alpha^3)^{1/3} = r\left(1 + \frac{\alpha^3}{r^3}\right)^{1/3}}$$

> 196 Gesamtsitzung vom 3. Februar 1916. — Mitt. vom 13. Januar
>
> einführt. Da $\frac{\alpha}{r}$ nahe gleich dem doppelten Quadrat der Planetengeschwindigkeit (Einheit die Lichtgeschwindigkeit) ist, so ist die Klammer selbst für Merkur nur um Größen der Ordnung 10^{-12} von 1 verschieden. Es ist also praktisch R mit r identisch und Hrn. Einsteins Annäherung für die entferntesten Bedürfnisse der Praxis ausreichend.
>
> Zum Schluß soll noch die strenge Form des dritten Keplerschen

Fig. 14 – La solution de Schwarzchild rejoint celle d'Einstein.

Traduction du passage souligné :

"*En fait r et R sont pratiquement identiques*."

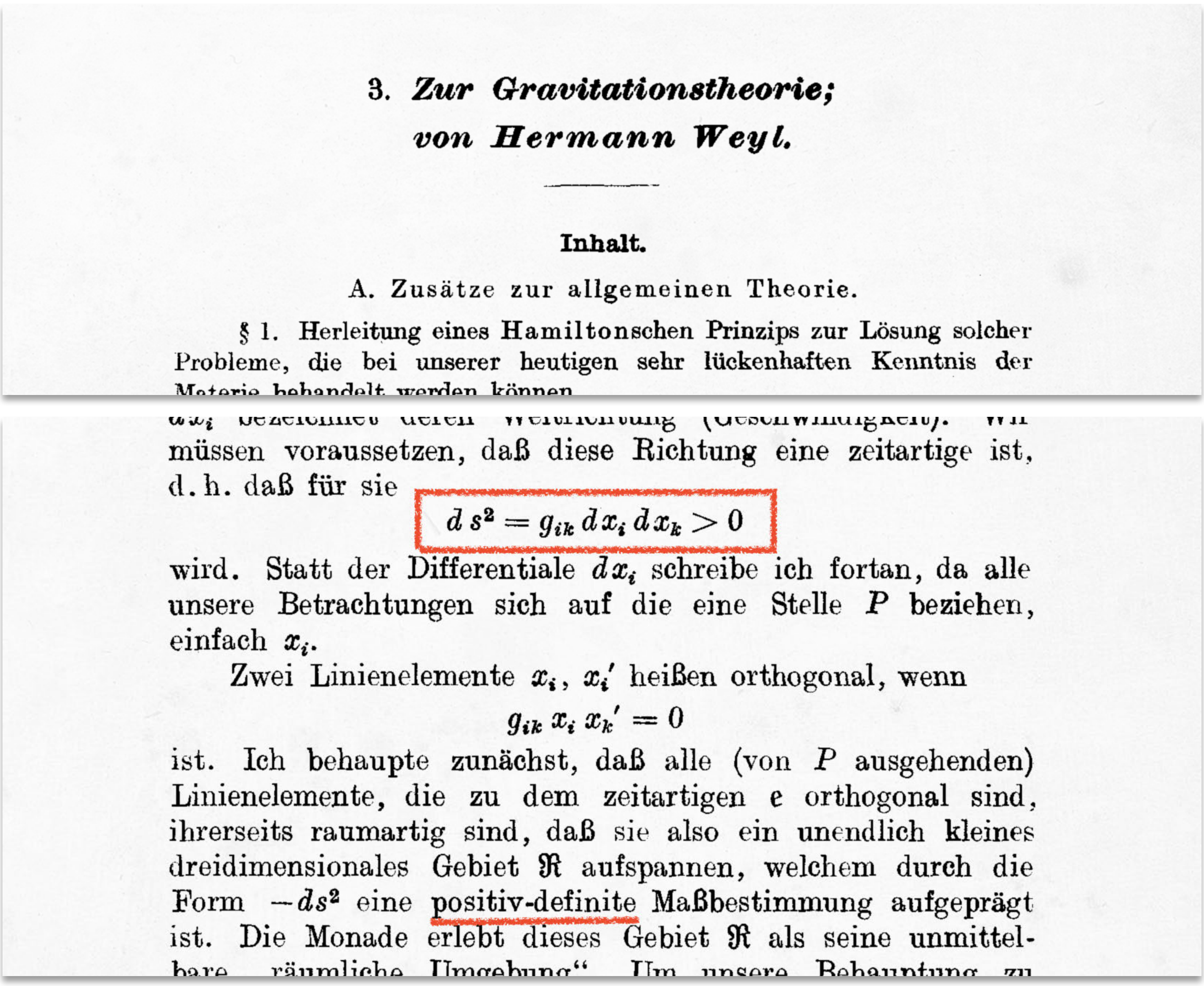
Après le décès de Schwarzschild, son travail sera tout d'abord présenté à la communauté des mathématiciens par Frank [9] puis rapidement repris par Droste [10], Weyl [11] et bien entendu, Hilbert [6].

Ce sont les médias, essentiellement américains, qui créeront une image d'Einstein comme celle d'un génie isolé, auteur d'une théorie qu'un nombre infime de personnes aurait été en état de comprendre. Cela ne réduit en rien les mérites d'Einstein mais en fait, à cette époque, il se situait simplement à la pointe d'une recherche dans laquelle un nombre relativement important de chercheurs, essentiellement germanophones, étaient déjà impliqués. Parmi ceux-ci, Schwarzschild.

Les articles sont alors publiés en Allemand et à cette époque l'accès aux travaux passe par la lecture de "tirés à part", sur support papier, qui sont transmis par voie postale. Par la suite, ces mêmes articles sont mis à disposition, regroupés dans des livres, mais toujours en Allemand. Il faudra attendre les années 1970, c'est à dire plus d'un demi-siècle, pour que cette documentation soit traduite en Anglais, puis mise encore plus tard à disposition sous forme de fichiers PDF. Aujourd'hui, la diffusion par Internet de ces fichiers est quelque chose de très récent. Des décennies plus tôt, pour diffuser de simples copies des articles, les chercheurs devaient taper leurs travaux sur des feuilles de calque, puis s'en servir pour impressionner un papier sensible aux UV, de couleur jaune. Et enfin, révéler ces copies en les soumettant à des vapeurs d'ammoniac. J'ai personnellement connu ce temps, dans les années 1960. Le scanner, pièce essentielle des photocopieuses, ne sera mis sur le marché qu'à la fin des années 1960.

Tout ceci a fait que ces travaux d'Einstein et de Schwarzschild se sont diffusés dans le milieu scientifique sous la forme de commentaires, et non sous leur forme originale.

On remarquera cependant que dans les articles de Droste [10] et de Weyl [11] l'élément de longueur est toujours positif, associé à une signature de la métrique (+ – – –).



3. *Zur Gravitationstheorie;*
von Hermann Weyl.

Inhalt.

A. Zusätze zur allgemeinen Theorie.

§ 1. Herleitung eines Hamiltonschen Prinzips zur Lösung solcher Probleme, die bei unserer heutigen sehr lückenhaften Kenntnis der Materie behandelt werden können.

müssen voraussetzen, daß diese Richtung eine zeitartige ist, d. h. daß für sie

$$\boxed{d s^2 = g_{ik}\, dx_i\, dx_k > 0}$$

wird. Statt der Differentiale dx_i schreibe ich fortan, da alle unsere Betrachtungen sich auf die eine Stelle P beziehen, einfach x_i.

Zwei Linienelemente x_i, x_i' heißen orthogonal, wenn

$$g_{ik}\, x_i\, x_k' = 0$$

ist. Ich behaupte zunächst, daß alle (von P ausgehenden) Linienelemente, die zu dem zeitartigen e orthogonal sind, ihrerseits raumartig sind, daß sie also ein unendlich kleines dreidimensionales Gebiet $\mathfrak{R}$ aufspannen, welchem durch die Form $-ds^2$ eine positiv-definite Maßbestimmung aufgeprägt ist. Die Monade erlebt dieses Gebiet $\mathfrak{R}$ als seine unmittelbare räumliche Umgebung". Um unsere Behauptung zu

Fig. 15 – Extrait de l'article de Weyl, 1917.

Toujours dans cet article de Weyl, on retrouve cette signature et la mention d’une coordonnée polaire *r* réelle et essentiellement positive.

B. Theorie des statischen rotationssymmetrischen Gravitationsfeldes.

§ 4. Massenpunkt ohne und mit elektrischer Ladung.

Für das Folgende ist es nötig, zu der Schwarzschildschen Bestimmung des Gravitationsfeldes eines ruhenden Massenpunktes[2]) einige Bemerkungen zu machen. Ein dreidimensionales kugelsymmetrisches Linienelement hat bei Benutzung geeigneter Koordinaten notwendig die Gestalt

$$d\sigma^2 = \mu\,(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + l\,(x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 + x_3\,dx_3)^2,$$

wo μ und l nur von der Entfernung

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

abhängen. Über die Skala, in der diese Entfernung gemessen wird, kann noch so verfügt werden, daß $\mu = 1$ ausfällt; das möge geschehen. Für das vierdimensionale Linienelement haben wir den Ansatz zu machen

$$ds^2 = f\,dx_4^2 - d\sigma^2,$$

wo auch f nur eine Funktion von r ist. Setzen wir noch

$$1 + l\,r^2 = h$$

und die Wurzel aus der Determinante hf gleich w, so ergibt

Fig. 16 – Dans Weyl (1917) la coordonnée polaire et la signature.

Mention similaire chez Droste, dans son papier communiqué en Anglais par Hendrik Lorentz seize jours après la mort de Schwarzschild, mais publié seulement l'année suivante. [10]

Physics. — “*The field of a single centre in* EINSTEIN’S *theory of gravitation, and the motion of a particle in that field.*”. By J. DROSTE. (Communicated by Prof. H. A. LORENTZ).

(Communicated in the meeting of May 27, 1916).

In two communications [1]) I explained a way for the calculation of

For a centre at rest and symmetrical in all directions it is easily seen that

$$ds^2 = w^2\,dt^2 - u^2\,dr^2 - v^2\,(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2), \qquad (2)$$

w, u, v only depending on r, and (ϑ, φ) representing polar coordinates. Now, if g_{ij} and therefore also g^{ij} are all zero, if $i \neq j$, G breaks up into six pieces, each of them relating to two indices. We

Fig. 17 – Droste précise le 27 mai 1916 la signature qu’il choisit.

Il ne semble venir à l'idée de personne d'étendre cette solution pour $r < \alpha$ ce qui impliquerait une modification de la signature de la métrique.

C'est alors qu'Hilbert présente la seconde communication de son long article "Fondements de la physique" :

Die Grundlagen der Physik.

(Zweite Mitteilung.)

Von

David Hilbert.

Vorgelegt in der Sitzung vom 23. Dezember 1916.

In meiner ersten Mitteilung [1]) habe ich ein System von Grundgleichungen der Physik aufgestellt. Ehe ich mich zur Theorie der Integration dieser Gleichungen wende, erscheint es nötig, einige allgemeinere Fragen sowohl logischer wie physikalischer Natur zu erörtern.

Zunächst führen wir an Stelle der Weltparameter w_s ($s =$

Fig. 18 – Seconde communication de Hilbert, 23 décembre 1916.

C'est la suite de la communication de 1915, qu'il reprend et où il intègre la solution publiée par Schwarzschild en janvier de la même année. Il sait que celui-ci est décédé. Einstein a prononcé un discours, éloge funèbre de Karl Schwarzschild [12] lors de la séance du 29 juin 1916 à l'Académie royale des sciences de Prusse à Berlin. Mais Hilbert ne semble guère s'attarder à ce résultat, qui ne lui semble être qu'un détail au sein de la vaste fresque qu'il entend mener dans son propre travail, où il entend traiter conjointement de la gravitation et de l'électromagnétisme. Concentrons-nous sur sa mention de cette solution de Schwarzschild.

die Grundlagen der Physik. 71

Gravitation einer in der Umgebung des Nullpunktes zentrisch-symmetrisch verteilten Masse anzusehen [1]). Im gleichen Sinne ist auch der Massenpunkt als der Grenzfall einer gewissen Verteilung der Elektrizität um einen Punkt herum aufzufassen, doch sehe ich an dieser Stelle davon ab, die Bewegungsgleichungen desselben aus meinen physikalischen Grundgleichungen abzuleiten. Ähnlich

Fig. 19 – L'hypothèse de symétrie centrale faite par Hilbert.

Il introduit ensuite des coordonnées polaires et désigne une quatrième variable par une lettre *l* :

2. Die $g_{\mu\nu}$ sind von der Zeitkoordinate x_4 unabhängig.

3. Die Gravitation $g_{\mu\nu}$ ist zentrisch symmetrisch in Bezug auf den Koordinatenanfangspunkt.

Nach Schwarzschild ist die allgemeinste diesen Annahmen entsprechende Maßbestimmung in räumlichen Polarkoordinaten, wenn

$$\begin{aligned} w_1 &= r\cos\vartheta \\ w_2 &= r\sin\vartheta\cos\varphi \\ w_3 &= r\sin\vartheta\sin\varphi \\ w_4 &= l \end{aligned}$$

gesetzt wird, durch den Ausdruck

$$F(r)\,dr^2 + G(r)\,(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) + H(r)\,dl^2 \tag{42}$$

dargestellt, wo $F(r)$, $G(r)$, $H(r)$ noch willkürliche Funktionen von r sind. Setzen wir

$$r^* = \sqrt{G(r)},$$

so sind wir in gleicher Weise berechtigt r^*, ϑ, φ als räumliche Polarkoordinaten zu deuten. Führen wir in (42) r^* anstatt r ein und lassen dann wieder das Zeichen $*$ weg, so entsteht der Ausdruck

$$M(r)\,dr^2 + r^2\,d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\,d\varphi^2 + W(r)\,dl^2, \tag{43}$$

wo $M(r)$, $W(r)$ die zwei wesentlichen willkürlichen Funktionen

Fig. 20 – Hilbert opte pour des coordonnées polaires.

Il y a plusieurs choses à lire dans l'extrait de la fig. 20. Dans l'hypothèse 3, on lit :

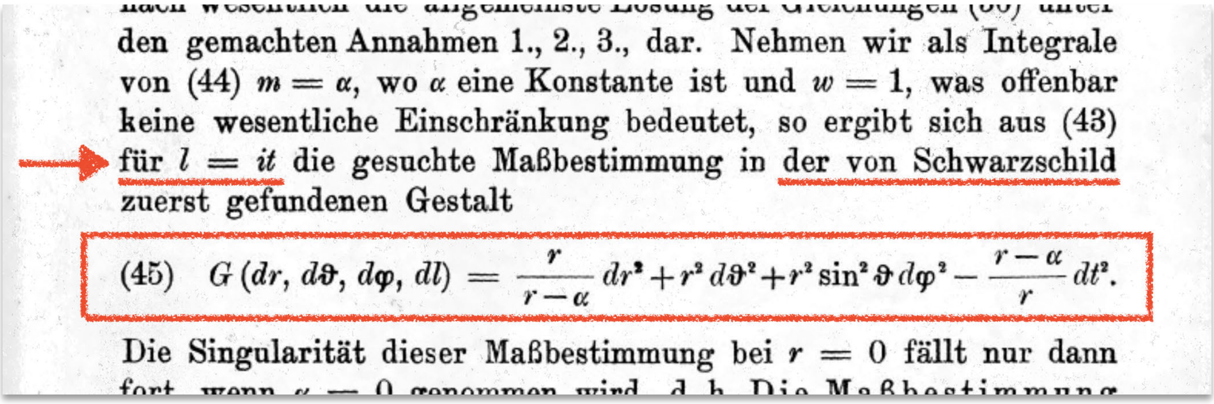
> "*The gravitation is centrally symmetric with respect to the origin of coordinates*."

On retrouve le thème d'une solution à symétrie centrale, et non à symétrie sphérique.

Dans l'équation (42) de son article, il présente la forme bilinéaire de sa métrique, puis introduit l'hypothèse $r^* = \sqrt{G(r)}$ où cette variable *r** se transforme rapidement en *r*. La traduction en anglais est :

> "*If we introduce r* in (42) instead of r and then eliminate the sign *, the result is the expression (43)*."

Cette hypothèse va alors totalement orienter sa solution. Au passage, il indique la nature de sa coordonnée temporelle l :



den gemachten Annahmen 1., 2., 3., dar. Nehmen wir als Integrale von (44) $m = \alpha$, wo α eine Konstante ist und $w = 1$, was offenbar keine wesentliche Einschränkung bedeutet, so ergibt sich aus (43) für $l = it$ die gesuchte Maßbestimmung in der von Schwarzschild zuerst gefundenen Gestalt

$$(45) \quad \boxed{G(dr, d\vartheta, d\varphi, dl) = \frac{r}{r-\alpha} dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2 - \frac{r-\alpha}{r} dt^2.}$$

Die Singularität dieser Maßbestimmung bei $r = 0$ fällt nur dann

Fig. 21 – Le temps imaginaire pur de Hilbert et sa formulation de la solution.

Pour Hilbert l'espace-temps est un fibré (*bundle*) construit sur la base d'un espace (x , y , z) réel, mais la fibre, c'est-à-dire la quatrième coordonnée *l*, est imaginaire pure.

Vis-à-vis de la solution de Schwarzschild, ce passage est absolument capital et va orienter un siècle de travaux scientifiques. Hilbert fait une confusion en écrivant :

> *"then for $l = i\,t$* (43) *results in the desired metric in the form first found by Schwarzschild."*

Si on complète sa solution (45) il convient d'écrire :

$$ds^2 = -\left(1-\frac{\alpha}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1-\dfrac{\alpha}{r}} + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2$$

alors que la véritable solution de Schwarzschild est :

$$ds^2 = \left(1-\frac{\alpha}{R}\right) dt^2 - \frac{dR^2}{1-\dfrac{\alpha}{R}} - R^2 d\vartheta^2 - R^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2 \qquad R^3 = (r^3+\alpha^3)^{1/3}$$

La différence saute aux yeux. Hilbert a confondu sa coordonnée *r* avec la grandeur auxiliaire *R* introduite par Schwarzschild. Il opte en outre pour une signature inversée.

Dans la suite de son article, Hilbert revient sur ce choix de variable, dans une note de bas de page, en le trouvant simplement sans intérêt. Il n'y voit qu'une idée de repousser la singularité à l'origine.

$$r^2 \sin^2 \vartheta \frac{d\varphi}{dp} = B, \tag{48}$$

$$\frac{r-\alpha}{r} \frac{dt}{dp} = C, \tag{49}$$

wo A, B, C Integrationskonstante bedeuten.

1) Die Stellen $r = \alpha$ nach dem Nullpunkt zu transformieren, wie es Schwarzschild tut, ist meiner Meinung nach nicht zu empfehlen; die Schwarzschildsche Transformation ist überdies nicht die einfachste, die diesen Zweck erreicht.

2) Dieser letzte einschränkende Zusatz findet sich weder bei Einstein noch bei Schwarzschild.

Fig. 22 – La note de bas de page de l'article de Hilbert mentionnant les travaux de Schwarzschild.

Traduction :

> "*To transform the locations to the origin, as Schwarzschild does, is not to be recommended in my opinion; Schwarzschild's transformation is moreover not the simplest that achieves this goal*."

Hilbert considère à cette époque que ce qui se passe sur cette sphère de Schwarzschild correspond à une véritable singularité (*true singularity*) alors qu'on montrera classiquement par la suite que ce n'est qu'une *coordinate singularity*, que l'on peut faire disparaître via un changement de variable approprié.

Signification géométrique

La solution de l'équation d'Einstein est une hypersurface à quatre dimensions. Einstein, Schwarzschild, Frank, Droste et Weyl sont restés dans l'idée que l'élément de longueur s, donc le temps propre, sur cette hypersurface, la seule chose qui soit indépendante du choix des coordonnées, est une grandeur réelle.

Le choix de Hilbert laisse la porte ouverte à des extensions où cet élément de longueur peut être imaginaire pur.

Revenons sur cette solution présentée par Schwarzschild en 1916. Il ne l'explicite pas, simplement parce qu'il n'en voit pas l'intérêt. Il cherche simplement à recoller avec le résultat d'Einstein en matière d'explication de la précession du périhélie de Mercure. Personne à cette époque ne songe qu'il puisse exister de véritables objets passibles d'un traitement non-linéaire du problème. Sa grandeur α n'est rien d'autre que ce qu'on appelera plus tard le rayon de Schwarzschild R_s. Il constate immédiatement que pour le Soleil, celle-ci équivaut au cent millième du diamètre de l'astre. Comme il se trouve que dans son article suivant, de février 1916 [8] sur lequel nous reviendrons, il a construit la géométrie à l'intérieur d'une sphère de densité constante, solution non singulière, il ne voit pas l'intérêt de disserter sur une région de l'espace, relevant de cette seconde solution "intérieure" en invoquant des problèmes liés à la solution "extérieure".

En 2011, Christian Corda [13] explicite cette solution :

$$ds^2 = \frac{(r^3+\alpha^3)^{1/3}-\alpha}{(r^3+\alpha^3)^{1/3}} c^2 dt^2 - \frac{r^4}{(r^3+\alpha^3)\left[(r^3+\alpha^3)^{1/3}-\alpha\right]} dr^2 - (r^3+\alpha^3)^{2/3}(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

On doit bien garder en tête qu'une telle métrique peut être exprimée dans un système de coordonnées arbitraire. Ces coordonnées ne sont alors que de simples nombres, des *space markers*. La seule grandeur qui a un caractère intrinsèque est la longueur s. Et là, tout dépend du choix pour lequel on a opté.

Si on décide que cette longueur s est réelle, alors une telle expression désigne une hypersurface à quatre dimensions. Le choix des angles θ et φ traduit une manière de rendre compte de la symétrie (sphérique et non centrale) de la solution. Il existe sur cette hypersurface des géodésiques hélicoïdales, qu'on peut traduire en donnant à θ une valeur fixe et en fixant la coordonnée r. Alors les variables t et φ s'expriment linéairement en fonction du paramètre s. Elles sont donc liées entre elles par une relation linéaire.

On peut alors calculer les projections spatiales de telles géodésiques, qui deviennent de simples cercles. Il est par conséquent possible de parcourir cette hypersurface en y inscrivant des cercles parallèles. Si leur périmètre peut atteindre $+\infty$ il est par contre limité inférieurement à $2\pi\alpha$. Si on fait varier la valeur de l'angle θ alors cette famille de cercles parallèles engendre une famille de sphères parallèles. Notons que nous employons à dessein le mot "parallèles" et non "concentriques" car la solution de Schwarzschild est à symétrique sphérique et non comme l'écrit Hilbert, centrale.

Lorsqu'on progresse, sur cette suite de sphères parallèles, en réduisant leur aire, on tombe sur une valeur minimale (si on décide que l'hypersurface est réelle). Cette situation est rencontrée :

- Soit pour une valeur $R = \alpha$ dans le cas de ce que nous appellerons "la représentation de Hilbert" (t, R, θ, φ) (en introduisant la grandeur auxilliaire *R*, selon Schwarzschild)

- Soit pour une valeur de $r = 0$ dans la représentation de Schwarzschild (t, R, θ, φ).

Cette hypersurface est donc non contractile. Comment alors l'interpréter ?

On peut évidemment décider que c'est une variété à bord. Un bord, d'ailleurs, le long duquel, dans la représentation de Schwarzschild, le déterminant de la métrique est nul, ce qui sera abordé dans la seconde partie du présent article. Mais dans les années 1960 d'autres voies ont été envisagées.

Les extensions de la solution et leur signification

Des décennies après l'émergence de cette solution de Schwarzschild, celle-ci n'est connue qu'à travers les commentaires qui ont été publiés par la suite. J'ai été très étonné, à un récent colloque sur les trous noirs qui s'est tenu à Francfort[2] (lieu de naissance de Schwarzschild), précisément intitulé "Le colloque Karl Schwarzschild" qu'aucun chercheur présent, y compris parmi les germanophones, n'avait jamais eu lecture des articles que je viens de mentionner, comme si les origines du modèle étaient perdues dans le brumes du passé. Dans son discours devant l'ensemble des congressistes, Juan Maldacena déclara[3] :

— *The Schwarzschild solution has confused us over a hundred years and it has forced us to sharpen our views on space and time. It has led to a sharper understanding of Einstein's theory. Experimentally, it is explaining several astrophysical observations. Its quantum aspects have been a source of theoretical paradoxes that are forcing us to understand better the relation between spacetime, geometry and quantum mechanics.*

Traduction :

— *La solution de Schwarzschild a été pendant un siècle une source de confusion et nous a contraint à approfondir la façon dont nous concevions l'espace et le temps. Ceci nous a amenés à une meilleure compréhension de la théorie d'Einstein. Sur le plan expérimental cela a expliqué un certain*

---

[2] 3rd Karl Schwarzschild Meeting on Gravitational Physics and the Gauge/Gravity Correspondence (KSM 2017), 24–28 July 2017, FIAS, Frankfurt am Main, Germany.

[3] https://indico.fias.uni-frankfurt.de/event/4/session/17/contribution/39

nombre d'observations. Les aspects quantiques ont fait émerger des paradoxes théoriques qui nous ont contraint d'avoir une meilleure vision des relations entre la géométrie de l'espace-temps et la mécanique quantique.

Ce texte suggère que la lecture immédiate de la solution de Schwarzschild était restée quelque chose de limité, mais qu'un approfondissement ultérieur, au prix d'un siècle de travail, a permis d'améliorer cette lecture en introduisant une vision étendue de l'espace-temps.

Pourquoi les astrophysiciens font-ils référence à cette solution de Schwarzschild ?

Comme on le verra dans la seconde partie, Schwarzschild, dès février 1916, avait complété sa solution "extérieure" [7] par une solution "intérieure" [8] décrivant la géométrie à l'intérieur d'une sphère emplie de fluide à densité constante. À ce stade, la géométrie associée à un astre baignant dans le vide était complètement achevée.

Mais le développement des observations allait faire apparaître un nouveau problème. Dans notre galaxie, la moitié des systèmes stellaires sont des systèmes multiples. On devait donc imaginer qu'il devait exister un très grand nombre de systèmes binaires où une des étoiles était constituée par une étoile à neutrons, subcritique, se prêtant encore à une description à l'aide des deux métriques de Schwarzschild, extérieure et intérieure, et l'autre une étoile compagne assez proche pour que le vent stellaire qu'elle émet puisse être capté par sa petite compagne.

Dès son premier article, en évaluant le rayon critique ($\alpha = R_s = 2m$) et en le reliant à la masse responsable de cette géométrie, il en avait conclu qu'à delà d'une certaine valeur, ce rayon de Schwarzschild pouvait excéder le rayon de l'astre.

C'est la question que posèrent les observateurs aux théoriciens :

— *En supposant que le phénomène supernova ne laisse en lieu et place que des étoiles à neutrons subcritiques, qu'advient-il quand l'apport de matière dû à la capture du vent stellaire émis par l'étoile compagne fait entrer cette étoile à neutrons dans un état de criticité géométrique ?*

Une question impossible à évacuer. Les théoriciens imaginèrent donc que la solution de Schwarzschild extérieure, qui pourtant se référait à une portion de l'univers vide, pourrait décrire un nouvel état de la matière, popularisé par le nom "trou noir".

Les extensions analytiques proposées

Quelle est la présentation actuelle de cette solution de Schwarzschild ? Prenons par exemple le livre d'Adler, Schiffer et Bazin. [14] Page 187, équations (6.4) et (6.5) les auteurs reconduisent l'hypothèse de Hilbert, en écrivant :

$$ds^2 = Ac^2dt^2 - B\,dr^2 - C(\,d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\,) \qquad\qquad \hat{r} = \sqrt{C(r)}\; r$$

Quelques lignes plus loin, la solution a de nouveau été particularisée, voir l'équation (6.9) :

$$ds^2 = e^{\nu(r)}c^2dt^2 - \; e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2(\,d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\,)$$

À moins que les fonctions $\nu(r)$ et $\lambda(r)$ ne se voient offerte la possibilité d'être imaginaires, on a l'impression que cette écriture milite pour une signature $(+---)$. Dans cette vision réaliste, cette métrique se réfère à une hypersurface où la seule grandeur pertinente, indépendante du choix des coordonnées, est la grandeur *s*. C'est le temps propre, vécu par toute particule témoin. Pour un observateur situé à grande distance, ce temps propre s'identifie alors à la variable *t*. Donc on en conclut que ce temps *t* est celui vécu par un observateur distant. La figure qui suit est celle qu'on retrouve dans tous les manuels. Elle compare les temps de chute libre mesurés soit par l'horloge liée à une particule témoin tombant vers la sphère de Schwarzschild, soit par un observateur distant.

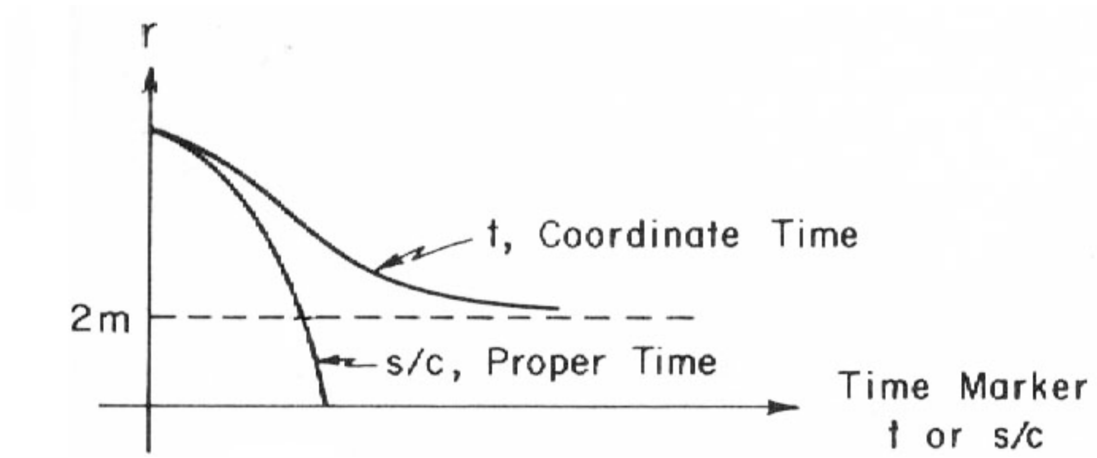


Fig. 23 – Fall toward the origin of a Schwarzschild geometry
in terms of coordinate time *t* and proper time on the test particle *s*/*c*.

Ainsi, quel que soit le phénomène dont cet observateur est témoin, celui-ci est censé se dérouler devant ses yeux en un temps infini, ce qui permet au théoricien d'ajouter :

— *Je ne me sens pas tenu de décrire le résultat d'un processus qui, à mes yeux, se déroule en un temps infini.*

Au passage, le Néo-Zélandais Roy Kerr [15] a étendu ce type de solution à un "trou noir tournant" grâce à une métrique exploitant une symétrie moins contraignante. La surface qu'on a baptisée "horizon des évènements" adopte alors la topologie d'un tore. Mais ce gel du temps, cet arrêt sur image est également présent dans ce modèle.

Toujours est-il qu'en 1960, Joseph Kruskal [16] et George Szekeres [17] ont construit un premier prolongement analytique, qualifié par Maldacena "d'extension de la solution à l'ensemble de l'espace-temps".

On citera également Corda, qui met en œuvre une autre façon d'opérer une extension analytique de la solution. [13]

En 1989, le Canadien Leonard S. Abrams a publié un article [18] sur la solution de Schwarzschild intitulé "The Black hole : the legacy of Hilbert's error" ("Le trou noir : l'héritage de l'erreur de Hilbert") pointant les mêmes problèmes que ceux que nous avons évoqués plus haut. Des questions également reprises par l'Italien Salvatore Antoci [19] [20]. Des articles qui n'ont pratiquement eu aucun écho au sein de la communauté scientifique, si on excepte un texte positionné dans un blog [4] par un mathématicien et informaticien, W. D. Clinger, se présentant comme spécialiste de topologie. Celui-ci reprend les arguments d'Abrams en écrivant :

— *The paper is well-written, and its math is almost (but not quite) correct.*

— *L'article est bien écrit et ses mathématiques sont presque (mais pas tout à fait) corrects.*

Un peu plus loin sa critique est plus appuyée : "*Where Abrams went badly wrong*" ("Là où Abrams se trompe complètement"). Il fournit ensuite la façon correcte de procéder :

— *In reality, the "quasiregular singularity" at the central point mass of the original Schwarzschild spacetime can be removed by allowing the radial coordinate r to go negative.*

[4] http://www.internationalskeptics.com/forums/showthread.php?t=231833

Autrement dit, il suffit d'envisager l'extension de la solution pour les valeurs de $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ <0$ c'est-à-dire dans une portion imaginaire de l'espace-temps… Il cite d'ailleurs Corda, qui fait de même et construit une description du collapse de l'étoile à neutrons qui se termine à une valeur négative $r=-\alpha=-R_s<0$.

Dans la mesure où ces auteurs s'octroient la liberté d'étendre l'espace-temps à une portion imaginaire, ceci ne peut plus être critiqué. Par contre ces gens qualifient de "crackpots" quiconque[5] ne s'estime pas satisfait d'une telle formule.

Conclusion

En 1916, Einstein, puis Schwarzschild, construisent, le premier grâce à une linéarisation et le second de manière non-linéaire, une solution de l'équation de champ qui se réfère à des valeurs réelles des coordonnées et à une valeur réelle de la longueur *s*, mesurée sur l'hypersurface quadridimensionnelle à l'aide de la métrique. Ce travail est ensuite repris par différents auteurs, comme Frank, Droste, Weyl, toujours dans la même optique. Cette approche implique la constance d'une signature explicite $(+---)$. Sur ce panorama se greffe alors l'interprétation donnée par le mathématicien David Hilbert qui part d'une vision différente, où le temps, et le temps propre, sont présentés comme des grandeurs imaginaires pures, par opposition à des coordonnées d'espace réelles, ce qui va de pair avec un choix de signature $(-+++)$ et explique alors le caractère hyperbolique de cette solution.

Quand un demi-siècle plus tard, il est demandé aux astrophysiciens de fournir un modèle susceptible de décrire une étoile à neutrons déstabilisée ils optent pour la solution trouvée par Hilbert, en décidant de l'étendre, via un prolongement analytique, à une portion imaginaire de l'espace-temps, où l'élément de longueur devient imaginaire pur et où la signature de la métrique se trouve inversée. Le but étant de ne pas s'arrêter à cette sphère de Schwarzschild et de pouvoir porter leurs investigations vers cet "intérieur de l'objet".

Tout dépend alors de ce que l'on considère comme relevant ou non de la physique.

Dans la seconde partie de l'article on présentera un scénario différent, où toutes les grandeurs restent réelles avec, corollaire, la conservation d'une signature $(+---)$.

---

[5] Voir par exemple cet avis : http://rationalwiki.org/wiki/Stephen_J._Crothers

References

[1] Einstein, A. (4 Nov. 1915). "Zur allgemeinen Relativitätstheorie". *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften (Berlin*). Sitzungsberichte. 778–786.
translated in English as:
Engel, A.; Schücking, E. (1997). "On the General Theory of Relativity". *The Collected Papers of Albert Einstein Vol. 6: The Berlin Years: Writings, 1914-1917 (English translation supplement)*. Doc. 21, 98–107. UK: Princeton University Press.

[2] Einstein, A. (11 Nov. 1915). "Zur allgemeinen Relativitätstheorie (Nachtrag)". *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften (Berlin*). Sitzungsberichte. 799–801.
translated in English as:
Engel, A.; Schücking, E. (1997). "On the General Theory of Relativity (Addendum)". *The Collected Papers of Albert Einstein Vol. 6: The Berlin Years: Writings, 1914-1917 (English translation supplement)*. Doc. 22, 108–110. UK: Princeton University Press.

[3] Einstein, A. (18 Nov. 1915). "Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie". *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften (Berlin*). Sitzungsberichte. 831–839.
translated in English as:
Engel, A.; Schücking, E. (1997). "Explanation of the Perihelion Motion of Mercury from the General Theory of Relativity". *The Collected Papers of Albert Einstein Vol. 6: The Berlin Years: Writings, 1914-1917 (English translation supplement)*. Doc. 24, 112–116. UK: Princeton University Press.

[4] Einstein, A. (25 Nov. 1915). "Die Feldgleichungen der Gravitation". *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften (Berlin*). Sitzungsberichte. 844–847.
translated in English as:
Engel, A.; Schücking, E. (1997). "The Field Equations of Gravitation". *The Collected Papers of Albert Einstein Vol. 6: The Berlin Years: Writings, 1914-1917 (English translation supplement)*. Doc. 25, 117–120. UK: Princeton University Press.

[5] Hilbert, D. (1916). "Die Grundlagen der Physik (Erste Mitteilung)". *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-Phys. Kl.* (8): 295–407. Presented in the session of 20 November 1915.
translated in English as:
Renn, J. (2007). "The Foundations of Physics (First Communication)". *The Genesis of General Relativity, Vol.4: Gravitation in the Twilight of Classical Physics: The Promise of Mathematics*. Springer. 1003–1015. doi:10.1007/978-1-4020-4000-9_44.

[6] Hilbert, D. (23 Dec. 1916). "Die Grundlagen der Physik (Zweite Mitteilung)". *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-Phys. Kl.* 53–76.
translated in English as:
Renn, J. (2007). "The Foundations of Physics (Second Communication)". *The Genesis of General Relativity, Vol.4: Gravitation in the Twilight of Classical Physics: The Promise of Mathematics*. Springer. 1017–1038. doi:10.1007/978-1-4020-4000-9_45.

[7] Schwarzschild, K. (13 Jan. 1916). "Über das Gravitational eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie". *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften (Berlin*). Sitzungsberichte. 189–196.
translated in English as:
Antoci, S.; Loinger, A. (12 May 1999). "On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory". arXiv:physics/9905030.

[8] Schwarzschild, K. (24 Feb. 1916). "Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus incompressibler Flüssigkeit nach Einsteinsechen Theorie". *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften (Berlin)*. Sitzungsberichte. 424–434.
translated in English as:
Antoci, S. (16 Dec. 1999). "On the gravitational field of a sphere of incompressible fluid according to Einstein's theory". arXiv:physics/9912033.

[9] Frank, Ph. (1916) in Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. 46: 1296.
translated in English as:
Antoci, S. (2003). "*Appendix A: Frank's review of Schwarzschild's 'Massenpunkt' paper*" in "David Hilbert and the origin of the Schwarzschild solution". *Meteorological and Geophysical Fluid Dynamics*. Bremen: Wilfried Schröder, Science Edition. arXiv:physics/0310104.

[10] Droste, J. (1917). "The field of a single centre in Einstein's theory of gravitation, and the motion of a particle in that field". *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie Van Wetenschappen, Series A*. **19** (I): 197-215. (Communicated by Prof. H. A. Lorentz at the KNAW meeting, 27 May 1916). Reprinted (2002) in *General Relativity and Gravitation*. **34** (9): 1545–1563. doi:10.1023/A:1020747322668.

[11] Weyl, H. (8 August 1917). "Zur Gravitationstheorie". *Annalen der Physik*. **54** (18): 117–145.
translated in English as:
Neugebauer, G.; Petroff, D. (March 2012). "On the theory of gravitation". *General Relativity and Gravitation*. **44** (3): 779–810. doi:10.1007/s10714-011-1310-7.

[12] Einstein, A. (29 June 1916). "Gedächtnisrede des Hrn. Einstein auf Karl Schwarzschild" (tr. "Memorial Lecture on Karl Schwarzschild"). *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften (Berlin)*. Sitzungsberichte. 768–770. Published 6 July 1916. No English translation available.

[13] Corda, C. (2011) "A clarification on the debate on the original Schwarzschild solution". *EJTP* **8** (25) 65–82. arXiv:1010.6031.

[14] Adler, R.; Bazin, M.; Schiffer, M. (1975). "Introduction to General Relativity" (2nd ed.). New York: McGraw-Hill. ISBN 978-0070004207.

[15] Kerr, R. P. (1963). "Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics". *Physical Review Letters*. **11** (5): 237. doi:10.1103/PhysRevLett.11.237.

[16] Kruskal, M. D. (September 1960). "Maximal Extension of Schwarzschild Metric". Physical Review. **119** (5): 1743–1745. doi:10.1103/PhysRev.119.1743.

[17] Szekeres, G. (1960). "On the singularities of a Riemannian manifold". *Publicationes Mathematicae Debrecen*. **7**: 285–301.
Reprinted (2002) in *General Relativity and Gravitation*. **34** (11): 2001–2016. doi: 10.1023/A:1020744914721.

[18] Abrams, L. S. (1989). "Black Holes: The Legacy of Hilbert's Error". *Canadian Journal of Physics* **67** (9): 919–926. doi:10.1139/p89-158. arXiv:gr-qc/0102055.

[19] Antoci, S.; Liebscher, D.-E. (2001). "Reconsidering Schwarzschild's original solution". *Astronomische Nachrichten*. **322** (2): 137–142. arXiv:gr-qc/0102084.

[20] Antoci, S. (2003). "David Hilbert and the origin of the Schwarzschild solution". *Meteorological and Geophysical Fluid Dynamics*. Bremen: Wilfried Schröder, Science Edition. arXiv:physics/0310104.