# Complex symplectic mechanics

Jean-Pierre Petit[1]

Manaty Research Group

**15 avril 2019**

---

**Abstract :** We show that the classical technique of the symplectic mechanics can be extended to a complex Hermitean space, giving a complex momentum map with complex geometrical attributes : energy, impulsion, spin.

---

In 1970 the mathematician J.M.Souriau introduces symplectic mechanics [1]. Starting from the isometry group of Minkowski space, i.e. the Poincaré group :

(1)
$$\begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

where L is the Lorentz group, and C the boost

(2)
$$C = \begin{pmatrix} \Delta x^{\circ} \\ \Delta x^{1} \\ \Delta x^{2} \\ \Delta x^{3} \end{pmatrix}$$

he computes the coadjoint action of the group on the dual of its Lie Algebra, which gives the following momentum map :

(3)
$$M' = L\,M\,L^{T} + C\,P^{T}\,L^{T} - L\,P\,C^{T}$$

(4)
$$P' = L\,P$$

where

(5)
$$P = \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

So that the Energy E , the impulsion p and the spin (enclosed in the M matrix) appear like pure geometrical objets, components of the momentum.

Surprizingly this technique can be easily extended to the complex world [2].

---

[1] Jean-Pierre.petit@manaty.net

If we replace the Minkowski coordinates $\left\{ x^{\circ}, x^{1}, x^{2}, x^{3} \right\}$ by complex coordinates we may form the 4D Hermitean space, whose metric is :

(6) $$ds^2 = \hat{c}^2 \overline{dt}\, dt - \overline{dx} dx - \overline{dy} dy - \overline{dz} dz$$

This metric is defined on a Hermitean manifold.

Let's now consider the real matrix G :

(7) $$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

and the complex Lorentz group defined as :

(8) $$L^{*} G\, L = G$$

$L^{*}$ stands for the adjoint (conjugate transpose) of L.

One can show easily that the complex Poincaré group

(9) $$\begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

where C is th complex boost, is an isometry group of the Hermitean space and can be considered as a complex dynamic group. Surprizingly all classical (matrix) calculations can be extended to such complex framework by simply substituting the adjoint matrices A* to the transpose matrices $A^{T}$. See the annex.

As a result, the complex momentum obeys the laws :

(10) $$M' = L\, M\, L^{*} + C\, P^{*} L^{*} - L\, P C^{*}$$

(11) $$P' = L\, P$$

where

(12) $$P = \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

E is a complex energy and p a complex impulsion. The spin, in complex matrix M, is complex too.

The symplectic approach creates a link between pure mathematics and physics. In the case of such complex extension, what could be its physical meaning ?

The Minkowski spacetime can be considered as the real part of a Hermitean space. In Minkowski space time we can consider the null geodesics as the paths of photons, and the non-zero geodesics as the paths of particles with spin.

Notice that in classical physics people only consider the restricted Poincaré group, built on the restricted Lorentz group. In effect the Lorentz group, as defined axiomatically by

(13) $$L^T G L = L$$

owns four connex components.

- $L_n$ is the neutral component, whose elements keep the orientation of time and space.

- $L_s$ elements invert space, not time.

- $L_t$ elements invert time, not space

- $L_{st}$ elements invert both time and space

The first two set form the orthochron subgroup $\{ L_o \}$

The next two form the antichron set $\{ L_a \}$

The restricted Poincaré group is :

(14) $$\begin{pmatrix} L_o & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

The corresponding action on the moment is :

(15) $$M' = L_o M L_o^T + C P^T L_o^T - L_o P C^T$$

(16) $$P' = L_0 P$$

The complete Poincaré group can be written as :

(17) $$\begin{pmatrix} \lambda L_o & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{with } \lambda = \pm 1$$

which gives :

(18) $$M' = L_o M L_o^T + \lambda C P^T L_{T_o} - \lambda L_o P C^T$$

(19) $$P' = \lambda L_o P$$

From (19) we see that the time inversion goes with the inversion of the energy , and mass.

**The Janus group**

A first extension of the restricted Poincaré groupe is :

(20)
$$\begin{pmatrix} \mu & 0 & \phi \\ 0 & L_o & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad \mu = \pm 1$$

and acts on the 5D Kalusa space :

(21)
$$\begin{pmatrix} \zeta \\ x^\circ \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

with a new boost :

(22)
$$\begin{pmatrix} \phi \\ C \end{pmatrix}$$

Applying the calculation of the action of the momentum, this gives an additional equation :

(23)
$$q' = \mu q$$

q is the additional physical quantity corresponding to the translation along the fifth dimension . It is identified to the electric charge. The inversion of the charge goes with the inversion of the fith dimension [3].

Notice that such an approach can be extended, introducing new extra-dimensions, each one going with a subsequent quantum charge (the electric charge is nothing but one of those charges).

Now we can shift to the Janus group :

(24)
$$\begin{pmatrix} \lambda\mu & 0 & \phi \\ 0 & \lambda L_o & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad \mu = \pm 1 \quad \text{and} \quad \lambda = \pm 1$$

which acts on the janus bimetric space ([7] , [14])

After Janus model the universe is a manifold with two metrics $g_{\mu\nu}^{(+)}$ and $g_{\mu\nu}^{(-)}$ which refer to positive and negative mass. After the Janus coupled field equations [16] :

(25)

$$R^{(+)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R^{(+)} g^{(+)}_{\mu\nu} = \chi \left[ T^{(+)}_{\mu\nu} + \varphi \sqrt{\frac{g^{(-)}}{g^{(+)}}}\; T^{(-)}_{\mu\nu} \right]$$

$$R^{(-)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R^{(-)} g^{(-)}_{\mu\nu} = -\chi \left[ \phi \sqrt{\frac{g^{(-)}}{g^{(+)}}} T^{(+)}_{\mu\nu} + T^{(-)}_{\mu\nu} \right]$$

Newtonian approximation gives the gravitational interaction laws :

- Masses with same sign mutually attract through « Newton's law »

- Masses with opposite signs mutuelly repel through « anti-Newton »

**References** :

[1] J.M.Souriau : Structure des systèmes dynamiques. Dunod Ed. France, 1970 and Structure of Dynamical Systems. Boston, Birkhaüser Ed. 1997

[2] J.P.Petit : A Symplectic Cosmological Model. Progress in Physics, Vol. 14, jan. 2018 http://www.ptep-online.com/2018/PP-52-09.PDF

[3] J.M.Souriau : Géométrie et Relativité (in french). Ed. Hermann 1954

[4] J.P.Petit, G.D'Agostini : Cosmological Bimetric model with interacting positive and negative masses and two different speeds of light, in agreement with the observed acceleration of the Universe. Modern Physics Letters
A, Vol.29 ; N° 34, 2014 ; Nov 10th DOI :10.1142/So21773231450182X

[5] J.P.Petit & G.D'Agostini : Cancellation of the singularity of the Schwarzschild solution with natural mass inversion process. Mod. Phys. Lett. A vol. 30 n°9 2015Doi:10.1142/S0217732315500510

[6] J.P.Petit & G.D'Agostini : Lagrangian derivation of the two coupled field equations in the Janus Cosmological Model. Astrophysics and Space Science 2015, 357 :67Doi : 10.1007/s10509-015-2250-6

[7] J.P.Petit, G.D'Agostini : Negative Mass hypothesis in cosmology and the nature of dark energy. Astrophysics And Space Science,. *A* **29**, 145-182 (2014)

[8] J.P.PETIT, Twin Universe Cosmology, Astrophys. and Sp. Science, **226**, 273-307, 1995

[9] J. P. Petit, Univers Enantiomorphes à flèches du temps opposées, CRAS du 8 mai 1977.

t. 285, pp. 1217–1221 (1977).

[10] J. P. Petit, Univers en interaction avec leur image dans le miroir du temps, CRAS du6 juin, t. 284, série A, pp. 1413–1416 (1977).

[11] J.P.Petit, G. D'Agostini, N.Debergh : Physical and mathematical consistency of the Janus Cosmological Model (JCM). Progress in Physics 2019 Vol.15 issue 1

[12] J. P. Petit, P. Midy and F. Landhseat, Twin matter against dark matter, int. Conf. onAstrophysics and Cosmology, Where is the Matter?, Tracing Bright and Dark Matter with the New Generation of Large-Scale Surveys (Marseille, France, June 2001).

[13] J. P. Petit, Nuovo Cimento B. The missing mass problem. **109**, 697 (1994).

[14] J. P. Petit and G. D'Agostini, J.P.Petit, Negative mass hypothesis in cosmology and the nature of dark energy. Astrophysics and Space Science, 2014 sept. 20 th

[15] J.P.Petit, P.Midy and F.Landsheat: Twin matter against dark matter. Intern. Meet. on Atrophys. and Cosm. "Where is the matter ? ", Marseille 2001 june 25-29

# ANNEX

| | |
|---|---|
| Consider the Minkowski space<br>Whose metric is<br>$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$<br>with signature ( + - - - )<br>corresponding to the Gramm matrix :<br>$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ | Consider the Hermite space<br>Whose metric is<br>$ds^2 = \hat{c}^2\overline{dt}\,dt - \overline{dx}dx - \overline{dy}dy - \overline{dz}dz$<br>with same signature ( + - - - )<br>corresponding to the Gramm matrix :<br>$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ |
| Introduce the Lorentz group L as defined by :<br>$L^T G L = G$<br>$L^{-1} = G L^T G$ | Introduce the complex Lorentz group, as defined by :<br>$L^* G L = G$<br>$L^{-1} = G L^* G$ |
| And the spacetime translation four-vector :<br>$\begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$ | And the complex spacetime translation four-vector :<br>$\begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$ |
| We form the Poincaré group :<br>(1)<br>$g = \begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | We form the complex Poincaré group :<br>(1)<br>$g = \begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| And its Lie algebra element :<br>(2)<br>$Z = \begin{pmatrix} G\omega & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ | And its complex Lie algebra element :<br>(2)<br>$Z = \begin{pmatrix} G\omega & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ |

| | |
|---|---|
| with $$\omega^{T} = -\omega$$ | with $$\omega^{*} = -\omega$$ |
| We form :<br>(3) $$Z' = g^{-1} Z\ g$$ | We form :<br>(3) $$Z' = g^{-1} Z\ g$$ |
| We get :<br>(4) $$\begin{pmatrix} G\omega' & \gamma' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L^{-1}G\omega L & G\omega C + L^{-1}\gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ | We get :<br>(4) $$\begin{pmatrix} G\omega' & \gamma' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L^{-1}G\omega L & G\omega C + L^{-1}\gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ |
| as $$G\,G = I \text{ and } L^{-1} = G\ {}^{t}L\ G$$ | as $$G\,G = I \text{ and } L^{-1} = G\,L^{*}G$$ |
| (5) $$\omega' = L^{T}\omega L$$ | (5) $$\omega' = L^{*}\omega L$$ |
| (6) $$\gamma' = G\ L^{T}\omega C + G\ L^{T} G\gamma$$ | (6) $$\gamma' = G\ L^{*}\omega C + G\ L^{*} G\gamma$$ |

Introduce the coadjoint action $\mu \mapsto \mu'$ of the group on its moment through the duality relationship :

$$< Z , \mu > = < Z' , \mu' >$$

| | |
|---|---|
| The momentum of the Poincaré group will be denoted :<br>(7) $$\mu = \{\ M , P\ \} \text{ with } M^{T} = -M$$ | The complex momentum of the complex Poincaré group will be denoted :<br>(7) $$\mu = \{\ M , P\ \} \text{ with } M^{*} = -M$$ |
| and will be defined by the identity :<br><br>(8) $$\mu \equiv \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left(M\omega\right) + P^{T} G\gamma$$ | and will be defined by the identity :<br><br>(8) $$\mu \equiv \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left(M\omega\right) + P^{*} G\gamma$$ |
| | |

| | |
|---|---|
| Introduce the duality relationship :<br>(9)<br>$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\mathrm{M}\omega\right)+\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{G}\gamma=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\mathrm{M}'\omega'\right)+\mathrm{P}'^{\mathrm{T}}\ \mathrm{G}\ \gamma'$ | Introduce the duality relationship :<br>(9)<br>$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\mathrm{M}\omega\right)+\mathrm{P}^{*}\mathrm{G}\gamma=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\mathrm{M}'\omega'\right)+\mathrm{P}'^{*}\ \mathrm{G}\ \gamma'$ |
| We get<br>(10)<br>$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\mathrm{M}\omega\right)+\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{G}\gamma=$<br>$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\mathrm{M}'\,\mathrm{L}^{\mathrm{T}}\omega\,\mathrm{L}\right)+\mathrm{P}'^{\mathrm{T}}\ \mathrm{L}\omega\mathrm{C}+\mathrm{P}'^{\mathrm{T}}\mathrm{L}^{\mathrm{T}}\mathrm{G}\gamma$ | We get<br>(10)<br>$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\mathrm{M}\omega\right)+\mathrm{P}^{*}\mathrm{G}\gamma=$<br>$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\mathrm{M}'\,\mathrm{L}^{*}\omega\,\mathrm{L}\right)+\mathrm{P}'^{*}\ \mathrm{L}\omega\mathrm{C}+\mathrm{P}'^{*}\ \mathrm{L}^{*}\mathrm{G}\gamma$ |
| The identification on the $\gamma$ terms gives<br>(11)<br>$\mathrm{P}^{\mathrm{T}}=\mathrm{P}^{\mathrm{T}}{}'\mathrm{L}^{\mathrm{T}}\quad\rightarrow\quad\mathrm{P}=\mathrm{L}\,\mathrm{P}'$ | The identification on the $\gamma$ terms gives<br>(11)<br>$\mathrm{P}^{*}=\mathrm{P}'^{*}\mathrm{L}^{*}\quad\rightarrow\quad\mathrm{P}=\mathrm{L}\,\mathrm{P}'$ |
| In the trace one can achieve a circular permutation<br><br>(12)<br>$\mathrm{Tr}\left(\ \mathrm{M}'\mathrm{L}^{\mathrm{T}}\omega\,\mathrm{L}\ \right)=\mathrm{Tr}\left(\ \mathrm{L}\ \mathrm{M}'\ \mathrm{L}^{\mathrm{T}}\omega\ \right)$ | In the trace one can achieve a circular permutation<br><br>(12)<br>$\mathrm{Tr}\left(\ \mathrm{M}'\mathrm{L}^{*}\omega\,\mathrm{L}\ \right)=\mathrm{Tr}\left(\ \mathrm{L}\ \mathrm{M}'\ \mathrm{L}^{*}\omega\ \right)$ |
| The identification on the $\omega$ terms gives :<br>(13)<br>$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\ \mathrm{M}\omega\ \right)=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\ \mathrm{L}\,\mathrm{M}'\ \mathrm{L}^{\mathrm{T}}\omega\ \right)+\mathrm{P}'^{\mathrm{T}}\ \mathrm{L}^{\mathrm{T}}\omega\mathrm{C}$ | The identification on the $\omega$ terms gives :<br>(13)<br>$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\ \mathrm{M}\omega\ \right)=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\ \mathrm{L}\,\mathrm{M}'\ \mathrm{L}^{*}\omega\ \right)+\mathrm{P}'^{*}\ \mathrm{L}^{*}\omega\mathrm{C}$ |
| The second term of the second member is equal to thje product of a line-matrix by a column-matrix. This being equal tu the reversed product. Hereafter, schematically, the product of a line-matrix by a column-matrix :<br>(14)<br>$\mathrm{P}'^{\mathrm{T}}\mathrm{L}^{\mathrm{T}}\omega\mathrm{C}=\mathrm{Tr}\left(\ \mathrm{L}^{\mathrm{T}}\omega\mathrm{C}\ \mathrm{P}'^{\mathrm{T}}\ \right)$ | The second term of the second member is equal to the product of a line-matrix by a column-matrix. This being equal tu the reversed product. Hereafter, schematically, the product of a line-matrix by a column-matrix :<br>(14)<br>$\mathrm{P}'^{*}\ \mathrm{L}^{*}\omega\mathrm{C}=\mathrm{Tr}\left(\ \mathrm{L}^{*}\omega\mathrm{C}\ \mathrm{P}'^{*}\ \right)$ |
| In the trace we can achieve a circular permutation :<br>(15) | In the trace we can achieve a circular permutation :<br>(15) |

| | |
|---|---|
| $$P'^{T}L^{T}\omega C=\mathrm{Tr}\left(C P'^{T}L^{T}\omega\right)$$ | $$P'^{*}L^{*}\omega C=\mathrm{Tr}\left(C P'^{*}L^{*}\omega\right)$$ |
| Whence :<br>(16)<br>$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(M\omega\right)=$$ $$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(L M^{T}L^{T}\omega\right)+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(C P'^{T}L^{T}\omega\right)$$ | Whence :<br>(15)<br>$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(M\omega\right)=$$ $$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(L M^{*}L^{*}\omega\right)+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(C P'^{*}L^{*}\omega\right)$$ |
| where $\omega$ is a skew symmetric matrix. We know that a matrix' trace is equal to the product of another matrix by a symmetrical matrix. Any matrix can be symmetrized or skew symmetrized. In addition the trace of the product of a matrix by an skew symmetric (antisymmetric) matrix is zero. Whence :<br>(17)<br>$$\mathrm{Tr}\left(A\omega\right)=\mathrm{Tr}\left[(\mathrm{skew}-\mathrm{sym})\left(A\right)\times\omega\right]$$ | where $\omega$ is a skew symetric matrix. We know that a matrix' trace is equal to the product of another matrix by a symmeytrical matrix. Any matrix can be symmetrized or skew symmetrized. In addition the trace of the product of a matrix by an anti hermitian matrix is zero. Whence :<br>(17)<br>$$\mathrm{Tr}\left(A\omega\right)$$ $$=\mathrm{Tr}\left[(\mathrm{skew}-\mathrm{sym})\left(A\right)\times\omega\right]$$ |
| We can apply that to the matrix $C\,{}^{t}P\,{}^{t}L$ why we take the trace of its product by an skew symmetric matrix $\omega$<br>(18)<br>$$C P^{T}L^{T}=\mathrm{sym}\left(C P^{T}L^{T}\right)$$ $$+(\mathrm{skew}-\mathrm{sym})\left(C P^{T}L^{T}\right)$$ | We can apply that to the matrix $C*P*L$ why we take the trace of its product by an skew symmetric matrix $\omega$<br>(18)<br>$$C P^{*}L^{*}=\mathrm{sym}\left(C P^{*}L^{*}\right)$$ $$+(\mathrm{skew}-\mathrm{sym})\left(C P^{*}L^{*}\right)$$ |
| But :<br>(19)<br>$$\mathrm{Tr}\left[\mathrm{sym}\left(C P^{T}L^{T}\right)\times\omega\right]=0$$ | But :<br>(19)<br>$$\mathrm{Tr}\left[\mathrm{sym}\left(C P^{*}L^{*}\right)\times\omega\right]=0$$ |
| So that :<br>(20)<br>$$\mathrm{Tr}\left[C P^{T}L^{T}\omega\right]$$ $$=\mathrm{Tr}\left[(\mathrm{skew}-\mathrm{sym})\left(C P^{T}L^{T}\right)\times\omega\right]$$ | So that<br>(20)<br>$$\mathrm{Tr}\left[C P^{*}L^{*}\omega\right]$$ $$=\mathrm{Tr}\left[(\mathrm{skew}-\mathrm{sym})\left(C P^{*}L^{*}\right)\times\omega\right]$$ |
| (21)<br>$$(\mathrm{skew}-\mathrm{sym})\left(C P^{T}L^{T}\right)=$$ $$\frac{1}{2}\left[C P^{T}L^{T}+\left(C P^{T}L^{T}\right)^{T}\right]$$ | (21)<br>$$(\mathrm{skew}-\mathrm{sym})\left(C P^{*}L^{*}\right)=$$ $$\frac{1}{2}\left[C P^{*}L^{*}+\left(C P^{*}L^{*}\right)^{*}\right]$$ |
| (22) | (22) |

| | |
|---|---|
| $\left(C\,P^{T}\,L^{T}\right)^{T}=\left(P\,L^{T}\right)^{T}C^{T}=L\,P\,C^{T}$ | $\left(C\;P^{*}\,L^{*}\right)^{*}=\left(P\,L^{*}\right)^{*}C^{*}=L\,P\,C^{*}$ |
| (23) $(\text{skew}-\text{sym})\left(C\,P'^{T}\,L^{T}\right)=\frac{1}{2}\left(C\,P'^{T}L^{T}-L\,P'\,C^{T}\right)$ | (23) $(\text{skew}-\text{sym})\left(C\,P'^{*}\,L^{*}\right)=\frac{1}{2}\left(C\;P'^{*}\,L^{*}-L\,P'\,C^{*}\right)$ |
| (24) $\mathrm{Tr}\left(C\,P^{T}\,L^{T}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(C\,P'^{T}\,L^{T}-L\;P'\;{}^{t}C\right)$ | (24) $\mathrm{Tr}\left(C\;P^{*}\,L^{*}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(C\;P'^{*}\;L^{*}-L\;P'\,C^{*}\right)$ |
| Finally (25) $M=L\,M'\,L^{T}+C\,P'^{T}\,L^{T}-L\;P'\,C^{T}$ | Finally (25) $M=L\,M'\,L^{*}+C\;P'^{*}\;L^{*}-L\;P'\,C^{*}$ |
| (26) $P=L\,P'$ | (26) $P=L\,P'$ |

We can interchange M and M’ , P and P’ and we get the same formulae for the complex moment map, just changing « transposed » by « adjoint » :

$$\boxed{\begin{array}{c} M'=L\,M\,L^{T}+C\,P^{T}\,L^{T}-L\;P\,C^{T} \\ \\ P'=L\,P \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c} M'=L\,M\;L^{*}+C\;P^{*}\;L^{*}-L\;P\;C^{*} \\ \\ P'=L\,P \end{array}}$$

We can put the momentum into a matrix form :

(27) $$\mu=\begin{pmatrix} M & -P \\ P^{T} & 0 \end{pmatrix} \qquad \mu=\begin{pmatrix} M & -P \\ P^{*} & 0 \end{pmatrix}$$

and the action of the complex Poincaré group (right) becomes

(28) $$\boxed{\mu'=g\,\mu\,g^{T}} \qquad \boxed{\mu'=g\,\mu\,g^{*}}$$

**Une mécanique symplectique complexe : un toy modèle pour la vie ?**

**Une modélisation de nos différentes croyances.**

Jean-Pierre Petit[2]

Manaty Research Group

---

**Résumé :** On montre que la technique classique de la mécanique symplectique de Souriau peut être étendue à un espace Hermitien, complexe, donnant l'application moment avec ses composants : énergie, impulsions, spin, complexe.

---

En 1970 le mathématicien Jean-Marie Souriau introduit la mécanique symplectique [1]. Son point de départ est le groupe d'isométrie de l'espace de Minkowski, à savoir le groupe de Poincaré :

(1) $$\begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où L est le groupe de Lorentz et C le quadrivecteur translation spatio-temporelle

(2) $$C = \begin{pmatrix} \Delta x^\circ \\ \Delta x^1 \\ \Delta x^2 \\ \Delta x^3 \end{pmatrix}$$

**Un mot sur cette histoire d'action coadjointe** :

Le préfixe « co » implique la *dualité*. Qu'est-ce que c'est que la dualité ?

**g** est l'élément du groupe. Par « groupe de Lie » il faut entendre groupe de matrices qui dépendent d'un certain nombre de paramètres. Le groupe d'Euclide est un groupe de matrices :

$$\begin{pmatrix} a & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur translation représente trois paramètres, et le sous-groupe a, qui gère les rotations dans l'espace et les symétries, qui est le groupe O(3) dépend de trois paramètres ( des angles ). La somme : six paramètres. On dit que le nombre des paramètres dont dépend

---

[2] Jean-Pierre.petit@manaty.net

l'élément d'un groupe correspond à la *dimension* du groupe. Le groupe d'Euclide est donc de dimension trois plus trois égale six.

Si on considère le groupe de Poincaré, son cousin germain :

$$\begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

le vecteur translation spatio temporelle C représente quatre paramètres. Le groupe de Lorentz évoque des « rotations quadridimensionnelles ». Les rotations dans le groupe d'Euclide préservaient les longueurs des objets, de même que les translations et les symétries, c'est pour cela que le groupe constituait le *groupe d'isométrie* de l'espace Euclidien ( iso – metron : même mesure ).

Le groupe de Lorentz préserve une sorte de « rotation hyperbolique » et conserve en particulier le modèle du quadrivecteur Energie-impulsion :

$$P = \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

La dimension de ce sous-groupe de Lorentz est six. Donc six plus quatre égale dix. La dimension du groupe de Poincaré est dix.

On peut appeler $\left\{ g^1 , g^2 , g^3 , g^4 , g^5 , g^6 , g^7 , g^8 , g^9 , g^{10} \right\}$ les paramètres qui définissent cette matrice de format (5,5). Ces paramètres constituent un espace vectoriel de dimension dix. Maintenant on peut créer la différentielle $\delta\,\mathbf{g}$ du groupe $\mathbf{g}$, ce qui correspond à l'ensemble :

$$\left\{ \delta g^1 , \delta g^2 , \delta g^3 , \delta g^4 , \delta g^5 , \delta g^6 , \delta g^7 , \delta g^8 , \delta g^9 , \delta g^{10} \right\}$$

qui constitue encore un espace vectoriel de dimension 10.

Introduisons un vecteur de même dimension dont les composantes sont :

$$\left\{ \mu_1 , \mu_2 , \mu_3 , \mu_4 , \mu_5 , \mu_6 , \mu_7 , \mu_8 , \mu_9 , \mu_{10} \right\}$$

Vous remarquerez que j'ai mis les indices en bas, ce qui n'est pas un hasard. J'introduis une relation de dualité entre les deux vecteurs selon :

$$\sum_{i=1}^{i=10} \delta g^i \mu_i = Cst$$

Ainsi, si le vecteur $\left\{ \delta g^1, \delta g^2, \delta g^3, \delta g^4, \delta g^5, \delta g^6, \delta g^7, \delta g^8, \delta g^9, \delta g^{10} \right\}$ varie, le vecteur $\left\{ \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6, \mu_7, \mu_8, \mu_9, \mu_{10} \right\}$ variera « de manière duale ».

Cette variation du groupe correspond à celle de ce qu'on appelle « l'algèbre de Lie du groupe ».

A partir d'un groupe on peut construire non pas une unique action, comme l'action du groupe sur les points de l'espace de Minkowski :

$$\mathbf{g} \times \mathbf{X} = \begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \xi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L\xi + C \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \xi = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Au fil de cette théorie de la géométrie symplectique Souriau fait apparaître une autre action du groupe sur l'élément $\delta\, \mathbf{g}$ de son algèbre de Lie, selon :

$$\delta \mathbf{g}' = \mathbf{g}^{-1} \times \delta \mathbf{g} \times \mathbf{g}$$

$\mathbf{g}^{-1}$ étant la matrice inverse.

La dualité s'exprime selon :

$$< \boldsymbol{\mu}', \delta\, g' > = < \mu, \delta\, g >$$

D'où le vocable « action coadjointe sur le dual de l'algèbre de Lie du groupe ».

Ayant admis cela, ça n'est plus que du calcul matriciel. On a le groupe et sa forme différenciée. On calcule la matrice inverse du groupe, etc.

Les éléments $\left\{ \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6, \mu_7, \mu_8, \mu_9, \mu_{10} \right\}$ constituent ce qu'on appelle *le moment du groupe*. Ils appartiennent à son *espace des moments.* On remarquera que sa dimension est automatiquement égale à la dimension du groupe : dix.

Au bout de ce calcul matriciel on obtiendra l'application qui, à partir d'un élément de l'espace des *moments*, définissant un *mouvement* :

$\left\{ \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6, \mu_7, \mu_8, \mu_9, \mu_{10} \right\}$ on en tirera les composantes

de $\left\{ \mu'_1, \mu'_2, \mu'_3, \mu'_4, \mu'_5, \mu'_6, \mu'_7, \mu'_8, \mu'_9, \mu'_{10} \right\}$

C'est *l'application moment.*

Souriau réorganise ces composantes selon deux objets :

- Une matrice antisymétrique M de format (4,4)

- Un quadrivecteur P

Ce dernier sera le quadrivecteur Energie-impulsion. Une matrice antisymétrique de format (4,4) dépend de 6 composantes (trois tri-vecteurs) que Souriau nomme « spin s » et « passage f ». Ce dernier vecteur ne constitue pas un attribut de ce mouvement particulier puisqu'il peut être annulé par un changement de coordonnées « accompagnant la particule dans son mouvement ».

Pour Souriau une particule c'est

*un mouvement particulier dans l'espace de Minkowski.*

Donc un choix particulier d'un ensemble « énergie E, impulsion p , vecteur spin (non quantifié) s ». les particules deviennent « des classes de mouvements ».

A partir du groupe de Poincaré se dégagent donc :

- Des mouvements de particules qu'on appelle photons, d'énergie $\pm$ E
- Des mouvements de particules dotées d'une masse $\pm$ m

Souriau a été le premier à montre que le spin avait une nature géométrique.

Si on passe à l'espace de Kaluza le moment se trouve doté d'un attribut supplémentaire, le scalaire q, la charge électrique.

Dans l'espace Janus une nouvelle symétrie s'ajoute qui traduit la dualité matière antimatière.

L'antimatière représente simplement une autre classe de mouvements particuliers dans un espace 5D.

Petit remarque pour finir. Quid du groupe d'Euclide et de son moment ? Celui-ci représente 6 composantes. On peut alors calculer l'action du groupe sur ce moment. Mais que sont les six composantes de celui-ci ? Ils forment un *torseur*, ensemble de deux vecteurs qui seront alors assimilés à une force plus un couple.

Quel rapport avec la théorie des groupes dynamiques ?

Le groupe d'Euclide n'est qu'un groupe dynamique particulier

*Celui de la statique.*

Cette approche par les groupes dynamique permet des bilans. On peut créer des sommes. L'énergie d'un ensemble de particules est égale à la somme des énergies individuelles de celles-ci. Idem pour l'impulsion, le spin, la charge électrique.

Pour ce groupe de la statique la force et le couple qui s'exercent sur un ensemble de particules sont égaux à la somme des forces et des couples qui s'exercent sur les particules, individuellement.

*Je reprends le fil* :

Souriau calcule (voir annexe) l'action coadjointe de ce groupe sur son espace des moments et obtient :

(3) $$M' = L\,M\,L^T + C\,P^T L^T - L\,P\,C^T$$

(4) $$P' = L\,P$$

où

(5) $$P = \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

Ainsi l'énergie E, l'impulsions p et le spin s (lequel est présent dans la matrice M ) se présentent comme de purs objets géométriques, en tant que composantes du moment.

On constate avec surprise que cette démarche peut être étendues aux complexes [2].

Si nous remplaçons les coordonnées de l'espace de Minkowski $\left\{ x^\circ , x^1 , x^2 , x^3 \right\}$ par des coordonnées complexes nous formons l'espace Hermitien 4D, dont la métrique est :

(6) $$ds^2 = \hat{c}^2 \overline{dt}\,dt - \overline{dx}dx - \overline{dy}dy - \overline{dz}dz$$

Il est à remarquer que, comme le produit d'un nombre complexe a + ib par son conjugué a – ib est égal au carré de son module $a^2 + b^2$, alors $ds^2 > 0$

Cette métrique est définie sur une variété complexe.

Considérons la matrice G ( même signature ) :

(7) $$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et introduisons un groupe de Lorentz complexe, axiomatiquement défini par :

(8) $$*L\,G\,L = G$$

où *L est l'adjointe de L.

Nous pouvons alors construire le groupe de Poincaré complexe

(9) $$\begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où C est le vecteur translation spatio-temporelle de l'espace Hermitien 4D. C'est un groupe d'isométrie de cet espace, dont l'élément de longueur est réel. On constate avec surprise que tous les calculs matriciels qui conduisaient à la construction de l'application moment, à partir du groupe de Lorentz réel, peut être reconduits à l'identique, en changeant simplement « transposée » ${}^{t}A$. par « adjointe » *A. Voir les calculs dans l'annexe

L'action du groupe, complexe, sur son moment, complexe, devient :

(10) $$M' = L\,M\,L^* + C\,P\,L^* - L\,P\,C^*$$

(11) $$P' = L\,P$$

où

(12) $$P = \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

E est alors une énergie complexe. L'impulsion p est également complexe, de même que le spin, présent dans une matrice M complexe.

Cette approche, dans le monde des réels, crée un lien entre mathématique et physique. Quel est alors le sens de cette extension dans le monde des complexes ?

L'espace de Minkowski est un sous-ensemble de l'espace Hermitien. Dans cet espace de Minkowski nous considérons que les géodésiques de longueur nulle sont suivies par des photons, tandis que les géodésiques non-nulles sont suivies par des particules dotées d'une masse.

Classiquement, on ne retient que les composantes orthochrones du groupe de Poincaré, qui est alors dit « restreint ». Or le groupe de Lorentz, à partir duquel est construit le groupe de Poincaré, axiomatiquement défini par :

(13) $$L^{T}\,G\,L = L$$

possède quatre composantes connexes :

- $L_n$ est la composante neutre, qui n'inverse ni le temps, ni l'espace. .

- $L_s$ dont les éléments inversent l'espace, mais non le temps.

- $L_t$ dont les éléments inversent le temps, mais non l'espace.

- $L_{st}$ dont les éléments inversent à la fois l'espace et le temps.

Les deux premières composantes forment le sous-groupe orthochrone $\{ L_o \}$

Les deux suivantes, le sous-ensemble antichrone $\{ L_a \}$

Le groupe de Poincaré restreint est :

(14)
$$\begin{pmatrix} L_o & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Son action correspondante sur son moment est :

(15)
$$M' = L_o \, M \, L_o{}^T + C \, P^T \, L_o{}^T - L_o \, P \, C^T$$

(16)
$$P' = L_0 \, P$$

On peut écrire le groupe de Poincaré complet :

(17)
$$\begin{pmatrix} \lambda L_o & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{with } \lambda = \pm 1$$

Ce qui donne:

(18)
$$M' = L_o \, M \, L_o{}^T + \lambda C P^T L_o{}^T - \lambda L_o P C^T$$

(19)
$$P' = \lambda L_o \, P$$

A partir de (19) nous voyons que l'inversion de la coordonnée temps entraîne celle de l'énergie ( et de la masse ).

## Le groupe Janus

Une première extension du groupe de Poincaré restreint est :

(20)
$$\begin{pmatrix} \mu & 0 & \phi \\ 0 & L_o & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad \mu = \pm 1$$

qui a git sur l'espace de Kaluza 4D :

(21)
$$\begin{pmatrix} \zeta \\ x^{\circ} \\ x^{1} \\ x^{2} \\ x^{3} \end{pmatrix}$$

avec un nouveau pentavecteur translation :

(22)
$$\begin{pmatrix} \phi \\ C \end{pmatrix}$$

Le calcul de l'action coadjointe de ce nouveau groupe, de dimension 11, sur son espace du moment, donne l'équation supplémentaire :

(23)
$$q' = \mu q$$

On introduit alors un nouveau sous-groupe, qui est celui des translations selon cette cinquième dimension. Le scalaire q, théorème de Noether, s'ajoute au moment. C'est la charge électrique. On obtient ainsi, à travers ce formalisme, une modélisation géométrique de la symétrie matière-antimatière. L'antimatière double l'ensemble des mouvements des particules dotées d'une charge électrique, avec une inversion de cette cinquième dimension [3] .

Introduisons alors le groupe :

(24)
$$\begin{pmatrix} \lambda\mu & 0 & \phi \\ 0 & \lambda L_{o} & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad \mu = \pm 1 \quad \text{and} \quad \lambda = \pm 1$$

qui agit sur l'espace bimétrique Janus ([7] , [14])

Selon le modèle cosmologique Janus c'est une variété dotée de deux métriques $g^{(+)}_{\mu\nu}$ et $g^{(-)}_{\mu\nu}$ qui se réfèrent ; la première aux masses positives et la seconde aux masses négatives. Toujours selon ce modèle Janus ces métriques sont solutions du système d'équations de champ couplées [16]:

(25)

$$R^{(+)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R^{(+)} g^{(+)}_{\mu\nu} = \chi \left[ \ T^{(+)}_{\mu\nu} + \varphi \sqrt{\frac{g^{(-)}}{g^{(+)}}} \ T^{(-)}_{\mu\nu} \ \right]$$
$$R^{(-)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R^{(-)} g^{(-)}_{\mu\nu} = - \chi \left[ \ \phi \sqrt{\frac{g^{(-)}}{g^{(+)}}} T^{(+)}_{\mu\nu} + T^{(-)}_{\mu\nu} \ \right]$$

L'approximation Newtonienne fournit les lois d'interaction

- Les masses de même signe s'attirent selon la loin de Newton.

- Les masses de signes opposés se repoussent selon « anti-Newton ».

**Un toy model pour la vie et la conscience.**

Considérons le groupe de Poincaré complexe, et complet:

(26) $$\begin{pmatrix} \lambda L_o & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{with } \lambda = \pm 1$$

où $L_o$ et C sont complexes et où $\lambda$ est un réel .

Concentrons-nous sur les mouvements qui s'inscrivent dans la partie réelle de l'espace Hermitien, qui est alors un espace de Minkowski. Nous dirons que cet espace correspond au « monde physique ».

Si nous considérons maintenant le sous ensemble totalement imaginaire de cet espace Hermitien où s'inscrivent les mouvements nous dirons que ceux-ci se réfèrent à des masses imaginaires, positives et négative, et à des photons d'énergie imaginaire, constituant un « monde métaphysique ».

Comme l'a montré l'approche Janus, qui intègre des masses, réelles, positive et négative, qui se repoussent mutuellement, cette vision est conforme à l'observation. Les masses négatives, majoritaires à l'issue de l'ère radiative, forment les premières des conglomérats, qui repoussent la masse positive dans l'espace résiduel, laquelle acquiert alors une structure lacunaire ([8], [11]).. Le phénomène du Great Repeller, découvert en 2017 [17], confirme cette vision de la structure à grande échelle de l'univers. Ces deux secteurs restent cependant très différents. Ces immenses assemblages de masses négatives (de l'antimatière de masse négative) émettent des photons d'énergie négative, qui échappent à nos instruments d'observation. Ils se comportent comme d'immenses protoétoiles dont le cooling time est alors grand devant l'âge de l'univers. La fusion ne peut alors pas se produire dans ce secteur négatif. Par voie de conséquence celui-ci ne contient ni étoiles, ni galaxies, ni planètes, ni atomes lourds et par conséquent n'héberge pas la vie, de structure biologiques, ce qui restent l'apanage du monde des masses positives.

Qu'en est-il alors du monde métaphysique ?

Une extension de l'ensemble à un contexte pentadimensionnel ferait intervenir des charges électriques, réelles dans un des secteurs, imaginaires pures dans le second. On peut imaginer que les masses imaginaires chargées puissent être impliquées dans des lois similaires à celle de l'électromagnétisme du monde réel, et ainsi constituer des structures, des assemblages de « méta-molécules ».

On peut imaginer, toujours par analogie, que ces masses imaginaires puissent interagir avec des lois d'interaction du type :

- *Les masses imaginaires de même signe s'attirent.*

- *Les masses imaginaires de signes opposés se repoussent.*

Poussant notre toy model encore plus loin, imaginons que les masses imaginaires positives soient identifiées à ce qu'on appellerait « le Bien » et celle de signe négatif au « Mal ».

Dans notre monde réel, celui de notre physique et de notre astrophysique, les masses de signes opposés ne cohabitent pas, ne forment pas d'assemblages, parce qu'elles se trouvent d'emblée séparées par de très grandes distances. Nous pourrions imaginer que de divorce ne soit pas aussi brutal et immédiat dans le monde métaphysique et que puissent se constituer, par le biais de forces « méta-électromagnétiques », des structures intégrant à la fois des masses imaginaires positives et des masses imaginaires négatives, c'est à dire un mélange subtil de « Bien » et de « Mal ».

Le monde physique est résolument morphogénétique. Les lois de la physique, essentiellement grâce à la gravitation, font émerger d'un chaos originel des structures de plus en plus variées et riches. Les étoiles, et les supernovae, peuplent la table de Mendeleiev. Puis ces atomes forment spontanément des molécules, et des biomolécules. Les atomes lourds s'agrègent en formant des planètes. La vie y apparaît, même si son apparition reste présentement pour nous un mystère.

Tout ceci se joue en tant qu'expression d'un nombre limité de « lois de physiques ».

On peut imaginer que le monde métaphysique soit également morphogénétique, se structure d'une semblable manière, en suivant ce qu'on pourrait alors considérer comme « des lois métaphysiques ».

Quand on remonte dans le passé on tombe, dans le monde physique, sur un état totalement déstructuré, où les atomes, en tant qu'assemblages de plusieurs nucléons, n'existent pas encore.

On peut imaginer qu'il puisse en être de même, dans le monde métaphysique et que celui-ci connaisse son propre schéma évolutif. Donnons un nom à tout assemblage de masses imaginaires, en les désignant sous le vocable général « d'égrégores ».

Le monde réel engendre une large variété de structures. Celles-ci ont pour noms galaxies, étoiles, planètes. La matière se trouve alors sous de multiples formes, solide, liquide, gazeuse, sous la forme de plasma. Les étoiles émettent des bouffées de « vent stellaire » et peuvent échanger ainsi de la matière avec d'éventuelles voisines.

On peut imaginer une semblable variété de formes et d'apparences, de « nature », dans le monde métaphysique. Mais quels seraient alors les contenus d'un tel « métamonde » ?

Le monde physique contient en même temps des « êtres » et les phénomènes qui font que ces mêmes êtres interagissent, échangent de l'information. Il peut s'agir de rayonnement, d'ondes mais, qu'il s'agisse du comportement d'étoiles compagnes ou de biomolécules cette information prend alors une forme parfaitement matérielle. Il y a « des molécules messagères ».

Nous pouvons imaginer qu'il en soit se même dans le monde métaphysique. Des assemblages constituent alors des « personnalités », plus ou moins primitives, plus ou moins sophistiquées. Ces égrégores-personnalités peuvent alors interagir, non seulement à l'aide de champs, d'un « méta-rayonnement », mais aussi à travers des flux de paquets mes masses imaginaires, constituant des « formes-pensées ».

Ces formes peuvent aussi prendre des formes que nous nommons, « esprits » ou « dieux ».

A quoi correspondrait alors ce phénomène nommé « vie » ?

A l'irruption d'une interaction entre deux monde, le monde physique et le monde métaphysique. En fait ces deux univers sont tous deux morphogénétiques. L'amorphe y est exclu. Ceci situe le dessein central de l'univers :

*Se complexifier et étendre son schéma relationnel*

Les deux allant de pair. Dans le monde physique une telle évolution découle tout simplement des équations de la physique, qui sont structurantes par essence.

On peut imaginer qu'il en soit de même dans le monde métaphysique, où notre toy model donne une forme corpusculaire aux pensées, à la conscience. La Vie, en tant que surgissement d'une interaction entre ces deux mondes, décrites dans tous nos mythes, démultiplie, enrichit cette course à la complexité. Les êtres vivant deviennent alors mixtes, en tant qu'unions d'une structure biologique et d'une structure psychique, de pilotage, hébergée dans le monde métaphysique, lequel prend alors l'allure d'une noosphère.

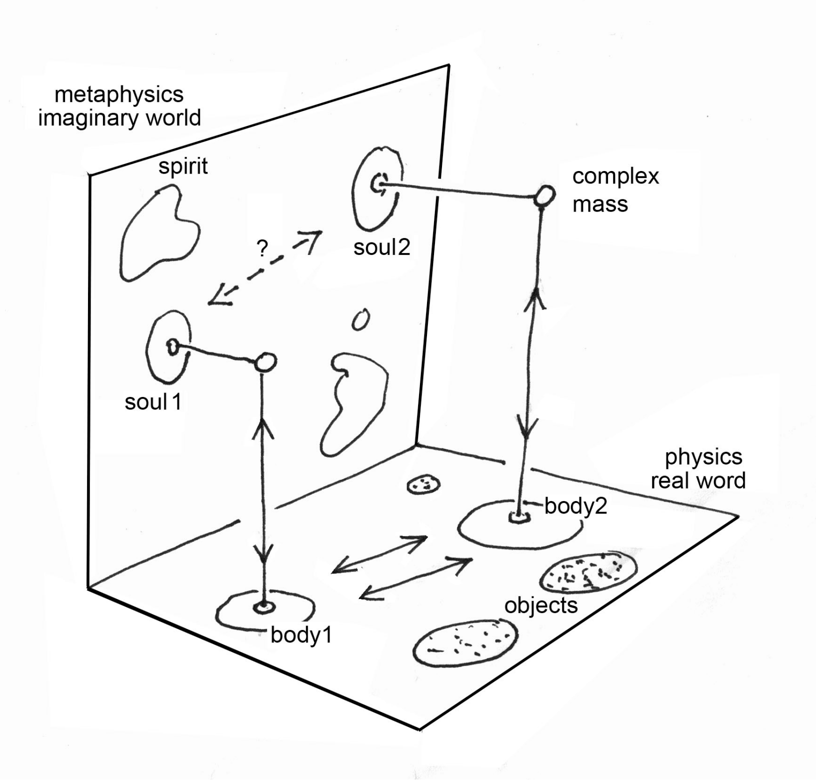
Il reste à imaginer comment se constituerait le lien entre ces entités. On peut alors imaginer des structures faites de biomolécules, faites de masses réelles, et des structures « psychiques », résidant dans le sous ensemble des masses imaginaires, les deux étant reliées par des structures faites de masses complexe, au sens mathématique du terme.

On sait que les simples lois de la physique font que des biomolécules relativement complexes peuvent apparaître « spontanément ». Il suffit de penser à la célèbre expérience de Miller qui avait conduit à l'apparition d'acides aminés, par simple effet de décharges électriques dans une soupe primitive abiotique. Une polymérisation également « spontanée » évoque la formation de « quasi protéines ». Le chemin vers la vie se trouve ainsi tracé.

Mais quand la vie apparaît-elle ?

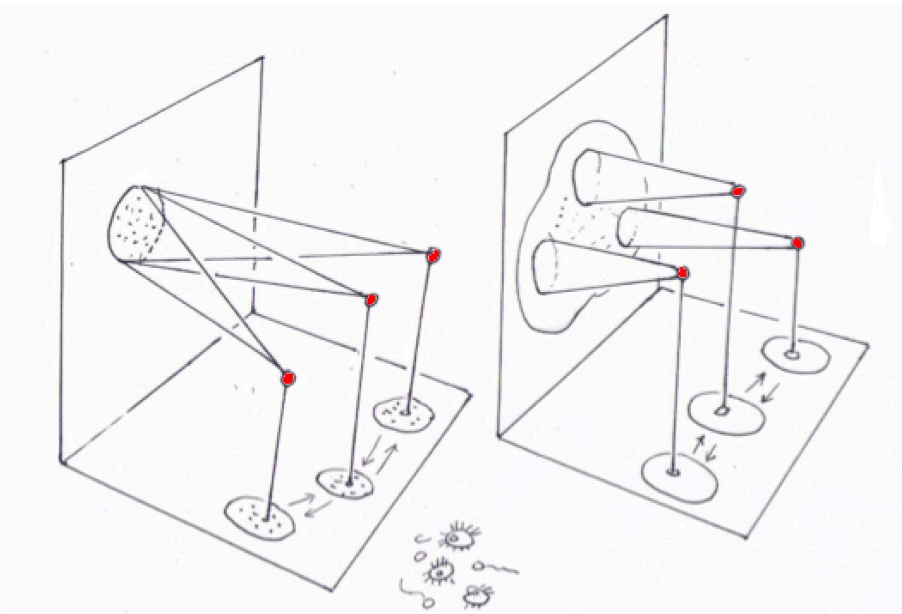
Il existe une molécule clé, au sein du vivant : l'ADN, que nous ne savons pas reproduire. Il est possible que ces molécules d'ADN aient, dans certains conditions, des natures « mixtes », c'est à dire hébergent des objets, éventuellement simples particules dotées d'une structure complexe, c'est à dire assurant le lien entre le monde physique et le monde métaphysique. Des particules qui joueraient alors le rôle d'antennes émettrices-réceptrices.

Ce qui ne veut pas dire que toute molécule d'ADN possèderaient une telle propriété.




Par anthropocentrisme on pense tout de suite aux être humains, leur structure psychique étant alors assimilées à leurs « âmes ». Au passage on voit apparaître une conception plus élaborée de la « mort », en tant que disparition du lien unissant les deux, ce qui implique que la structure psychique perdurerait alors le décès des individus. Voilà une réponse à une question millénaire.

Nous envisageons que tous les êtres vivants, quel que soit le règne où nous les classons, puissent avoir partie liée avec cette noosphère, à travers des structures plus ou moins individualisées, les êtres les plus primitifs (plancton) n'étant « pilotés » que par une structure psychique alors « collective ».

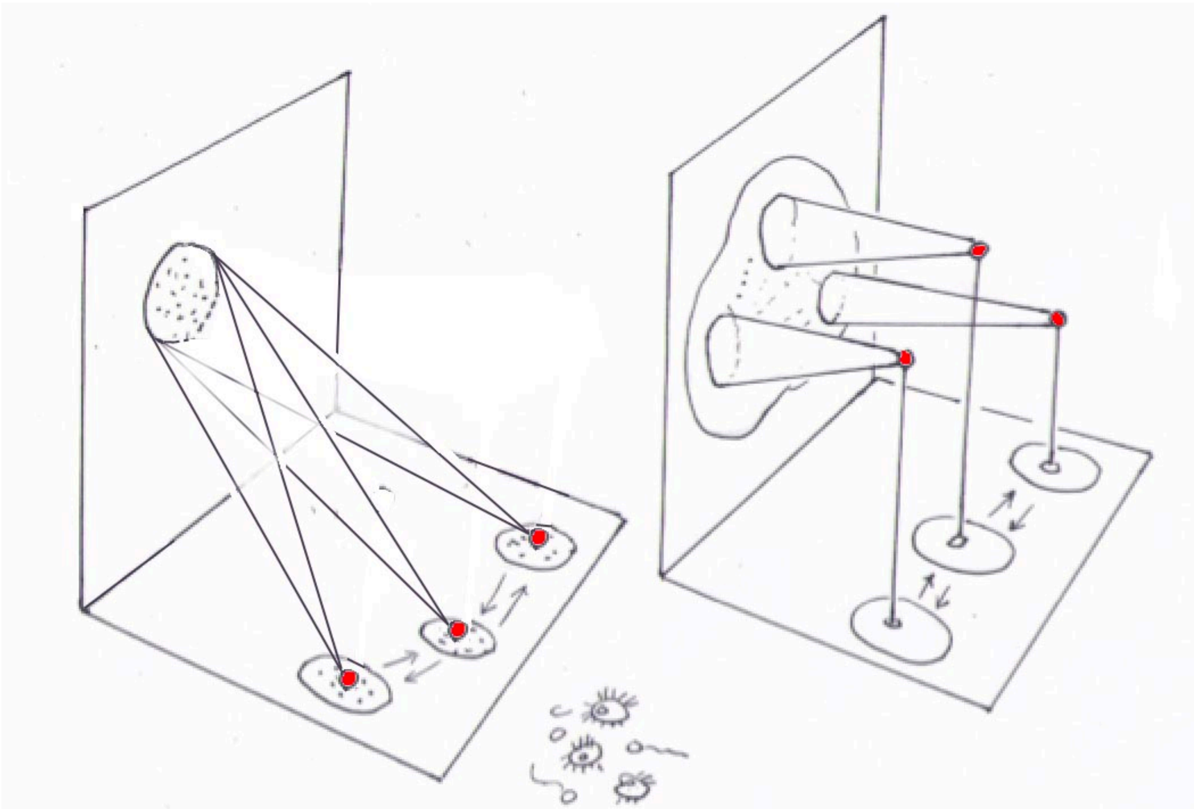


*Une hiérarchie dans le vivant. A gauche absence totale d'individualité : les élémentsd'être issus du zoo-plancton ou du phyto-plancton sont gérés par une même image dans la noosphère qui joue le rôle d'une « conscience d'espèce ». . A droite des individus plus élaborés, dotés d'âmes individuelles, immergées dans une âme collective*

**La conscience.**

Introduisons un « niveau de conscience », ce qui revient à situer ces petits objets rouges vis à vis de ces deux plans, physique et métaphysique.

On pourrait suggérer toute une palette de niveaux de conscience selon la proximité de ces « atomes de conscience » vis à vis des deux plans considérés. Chez les êtres vivnts les plus primitifs on trouverait « le niveau zéro de la conscience », ceci étant modélisé en plaçant des structures dans, ou très près du plan physique :



*Des « niveaux de conscience » très différents.*

La figure de gauche évoque les êtres vivants les plus primitifs, de zoo-plancton et le phyto-plancton, dépourvus d'individualité, qui sont gérés, pilotés par une unique structure du monde métaphysique. Ces êtres ne possèdent aucune mémoire. Ce sont des ROM (read only memories). Ils réagissent de manière totalement programmée, sur le plan physique, sont incapables de mémoriser une situation (donc de se préter à un apprentissage pavlovien).

A droite des êtres vivants plus élaborés. Dans les deux cas ces êtres transmettent des informations à leurs structures psychiques de pilotage où elles peuvent être mémorisées. Les êtres au niveau le plus bas n'ont qu'une « intelligence d'espèce ».

Les êtres vivant « vivent des expériences dans l'ici-bas » en informant leurs structures de pilotages situées dans « l'au-delà », dont ils sont en quelque sorte des yeux et les oreilles. L'être vivant est ainsi beaucoup plus élaboré que l'être « inanimé » et peut être aussi, dans un sens, que le « pur esprit » quand celui-ci se trouve privé d'informations en provenance de l'ici-bas ».

**Quid du darwinisme ?**

Le modèle mainstream du vivant fonde tout sur l'action du hasard, pour gérer l'évolution des espèces, vis une sélection naturelle. Le modèle proposé n'invalide pas totalement ce schéma. On pourrait comparer les êtres vivants, tous règnes confondus, à des robots, dotés de multiples fonctions correspondant à leurs programmes, de reconnaissance de formes, de comportements réflexes. La comparaison s'impose avec les robots d'exploration envoyés sur Mars, dont les « gestes » ne sont pas totalement télécommandés depuis la Terre.

Mais l'intelligence de tels robots ne se situe pas sur Mars. Il nous faudrait envisager des robots capables de se reproduire, et même de combattre d'autres robots concurrents. Capables aussi de se reproduire en engendrant d'autres robots-descendance, créés à partir des matériaux existant sur place.

La compétition entre robots simulerait le combat pour la vie. Certains modèles pourraient soudain s'avérer insuffisamment performants dans un biotope donné. Les ingénieurs pilotant à distance ces machines pourraient alors donner une palette d'ordres se traduisant par des modifications, intelligentes et non-aléatoires, de la génétique des modèles, des plans présidant à leur conception. On verrait alors apparaître un éventail de nouveaux prototypes. Et la « sélection naturelle » opérerait alors un choix au sein de cette palette de nouveaux modèles.

**L'activité au sein de la noosphère**

Dans cette noosphère on trouvera des égrégores divers et variés. L'analogie avec le monde de l'informatique apparaît. La mémoire s'appelle alors « souvenirs » (éventuellement déformés sous forme de « fantasmes »), « culture », en tant que « mémoire collective », également à composantes fantasmatiques. Les pensées, les affects, les sentiments, plus généralement, sont aussi des structures de la noosphère. Ce sont des systèmes organisés de croyances, des assemblages de mots, de concepts. De même nos programmes informatiques se construisent à partir de langages, d'opérateurs logiques.

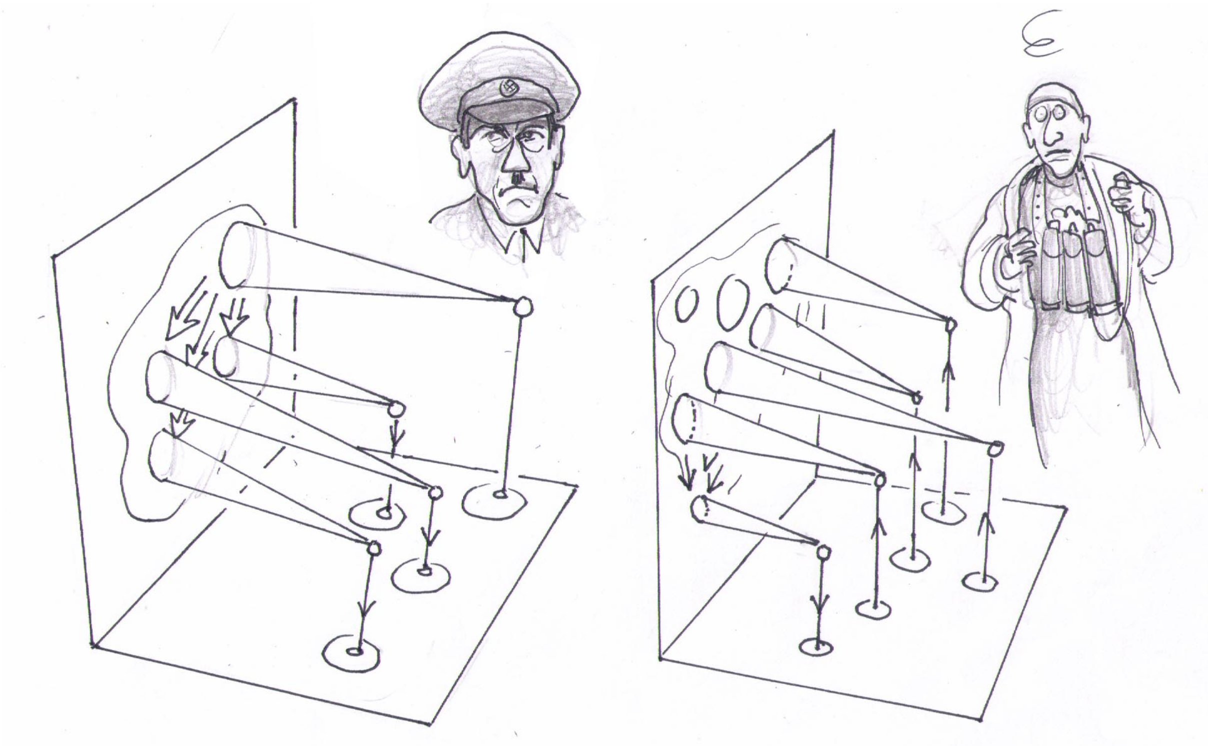
Nous sommes sur le point de créer une authentique intelligence artificielle, quand celle-ci se trouvera dotée d'autonomie (c'est à dire de la capacité de se reprogrammer).

Quel équivalent dans nos noosphères locales, planétaires ? Réponse : nos dieux, nos religions, nos idéologies. Idée que nous pourrions résumer selon la phrase :

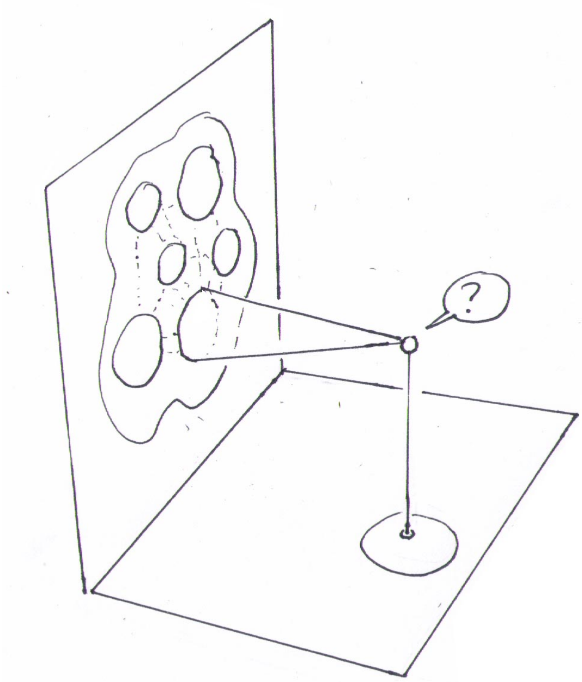
*Nous créons nos dieux et nos dieux nous créent*

Ce toy model se présente ainsi comme un très riche terrain de jeu pour philosophes, sociologues, théologiens et psychologues. Dans la mesure où les particules du métamonde pourraient échanger des informations par le biais d'ondes ou de « formes pensées » on peut imaginer que certains individus, puissent exercer une influence, non seulement à travers un discours diffusé dans l'ici bas, dans ce que nous appelons aujourd'hui une médiasphère, mais carrément dans la noosphère, en intoxiquant leurs semblables par des pensées délétères.

A l'inverse des individus pourraient à leur tour subir l'influence d'une « nébuleuse noosphérique » qui pourrait se constituer au sein d'une ethnie, la conscience de groupe prenant alors le pas sur leur conscience individuelle.

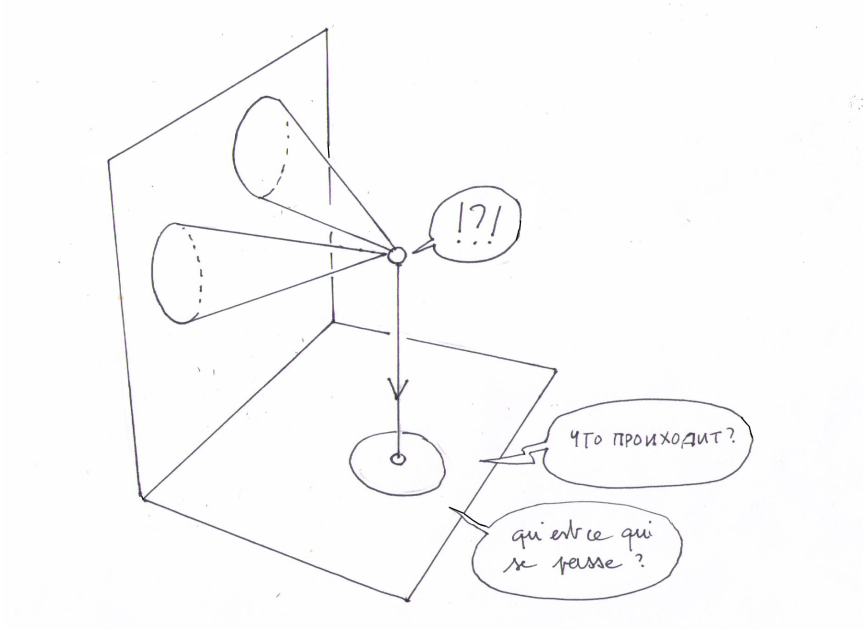


Supposons, comme le croient certains, que les êtres humaines puissent se trouver influencés par des vies antérieures, le schéma correspondrait alors à cette « multi-personnalité » :




*Une « multi-personnalité »*

On peut même envisager comme suit un dédoublement de personnalité :




*Dédoublement de personnalité, ou une « possession ».*

**Retour sur les niveaux de conscience.**

Nous entendons évidemment situer les êtres humains au plus haut niveau de cette « conscience ». On comprendra cependant que nous envisageons des consciences animales, voire végétales. L'être humain conserverait, dans un tel schéma, une part d'animalité, correspondants à ses instincts primaires. Que posséderait alors sa conscience, qui fasse de lui « plus qu'un animal » ?

*La capacité de se projeter dans le futur pour envisager les conséquences de ses actes*

Notre vision est résolument non-aléatoire et téléonomique. Le monde du vivant a un but central :

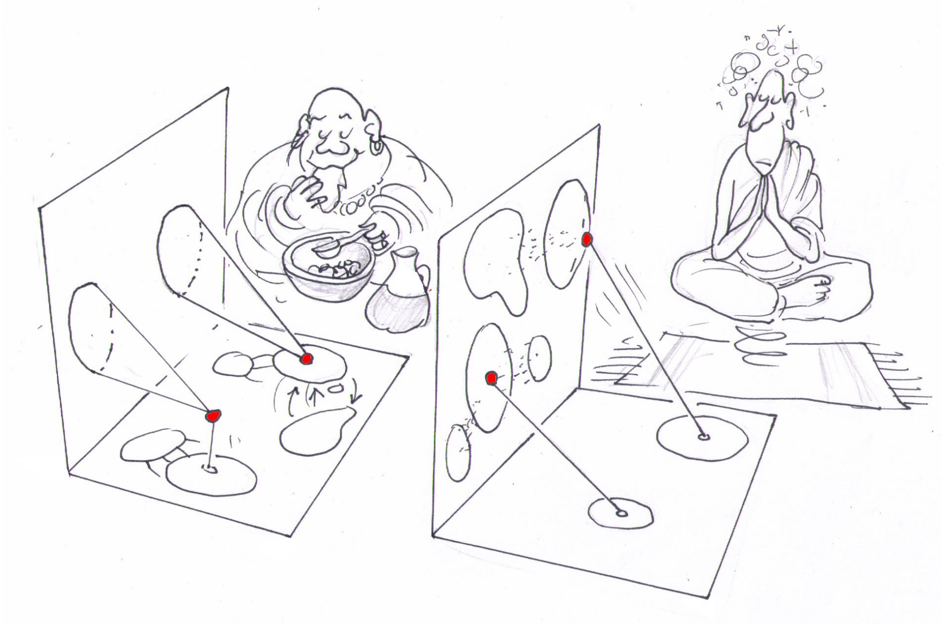
*Etendre son champ relationnel en se complexifiant.*

La complexité nucléaire et moléculaire est inscrite dans les lois de la physique. Celle du monde psychique serait alors « inscrite dans des lois métaphysiques » , avec comme but focal celui indiqué. Ce sont les chemins empruntés, dans cette course à travers plus de complexité qui se présentent, en fonction de ces lois métaphysiques comme des *phénomènes émergents*. L'hominisation est actuellement le chemin le plus élaboré, celui qui se traduit par une gestion maximale d'informations.

La *technologie* doit être perçue comme un simple *phénomène émergent*, inéluctable, découlant des lois métaphysiques. Elle rend possible, à terme, la seule chose que le « chemin purement biologique » est incapable d'assurer : l'extension du champ relationnel à l'échelle intersidérale.

Existerait-il des niveaux de conscience différents, entre les êtres humains ?

Ces niveaux peuvent résulter de l'éducation, de l'influence du milieu. Mais ils peuvent aussi être le résultat d'une pratique, dans un sens ou dans un autre, dont le résultat est illustré dans le dessin suivant.



A gauche un être humain animé de préoccupations «  bassement matérielles », « au ras de pâquerettes » Ce qui n'exclut pas un niveau élevé de sophistication dans les comportements. Tout son être est tendu vers des flux informatifs (synonymes de plaisirs matériels), liés au monde sensible. Contrairement à l'image caricaturale indiquée, un tel personnage ne se présente pas automatiquement comme un « consommateur de bien ». Il peut aussi en être le créateur.

A droite un autre être humain dont la posture tend vers « la spiritualité », ce qui passe par un certain détachement vis à vis du monde sensible. Le flux informatif recherché est alors d'une autre nature et peut être considéré comme générateur de « plaisir psychique ». De tels êtres humains anticipent en quelque sorte leur condition post mortem.

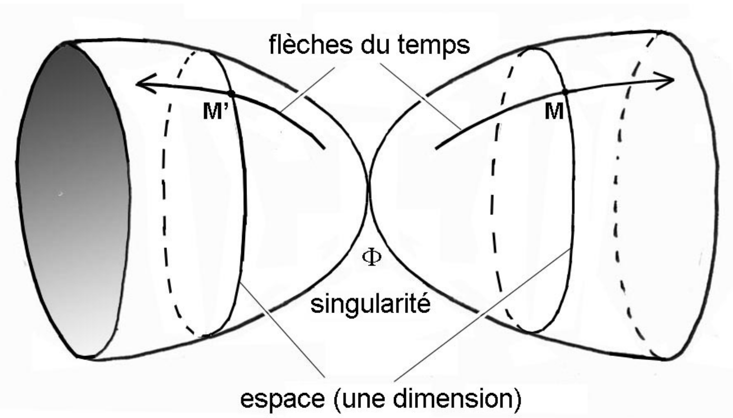
Tous deux exercent une influence sur l'humanité, l'un dans l'ici-bas et l'autres dans l'au-delà.

Dans ces comportements on peu trouver des démarches aussi bien positives que négatives.

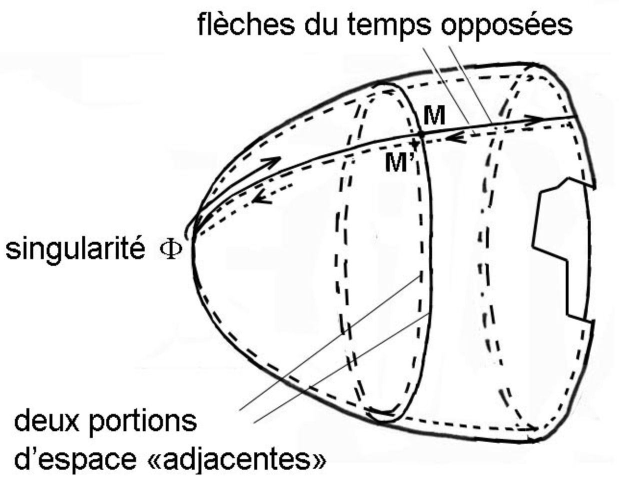
**Une noosphère, où ?**

De plus, cette noosphère, où est-elle ? Où se situe cet univers doté de coordonnées imaginaires ?

Inspirons nous du modèle Janus. Au départ il s'agit du modèle du Russe Andréi Sakharov de 1967, avec ses deux univers jumeaux. Non seulement les flèches du temps sont antiparallèles, mais ce second univers est dans un « ailleurs » non localisé.




Dans le modèle Janus on « replie » ensuite cet univers. Il n'y a plus deux contenants spatiaux (en x,y,z) mais un seul. Par contre c'est la coordonnée temps qui se trouve inversée.




Cette structure évoque l'idée d'une hypersurface « possédant un endroit et un envers » ayant des vecteurs normaux opposés. .

En vertu de son théorème de 1970 de Souriau, en jouant sur les quatre composantes connexes du groupe de Poincaré, arrive à la conclusion que cette inversion de la coordonnée temps va de pair avec l'inversion de l'énergie, et de la masse.

Il conviendrait évidemment de se pencher sur la structure de ce groupe de Lorentz complexe, défini par :

$$^{*}L\,G\,L = G$$

Pourrait-on alors parler de composantes connexes » ? Rien n'est moins sûr. Toute grandeur complexe peut être envisagée à travers sa description à l'aide d'un module et d'un argument.

$$z = r\,e^{\,i\theta}$$

On peut appliquer cela à la coordonnée temps :

$$t = \tau\,e^{\,i\theta}$$

Ce qui contient en particulier des temps réels $\pm\tau$ et des temps imaginaires purs $\pm i\tau$ . On peut supposer que l'équivalent des expressions issues du traitement du groupe de Poincaré réel conduirait en particulier à :

*- Les mouvements avec un temps réel $\pm\tau$ correspondent ceux de masses $\pm m$ , réelles*

*- Les mouvements avec un temps imaginaire $\pm i\tau$ correspondent ceux de masses $\pm im$ , imaginaires pures.*

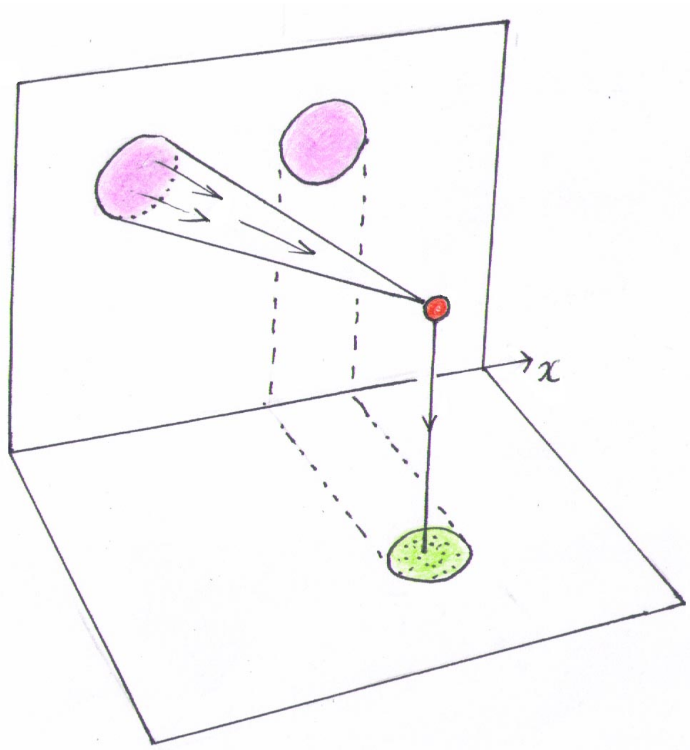
Nous n'avons pas d'équivalent, du style «  endroit et envers » pour illustrer l'idée qu'en tout point d'un espace on pourrait disposer de quatre flèches du temps, avec des relations d'opposition et d'orthogonalité.

Ce qui resterait, au demeurant c'est l'idée d'une unique localisation de la biosphère et de la noosphère. On achoppe avec les idées, issues de textes traditionnels, de l'association du corps biologique avec un « corps astral » ou « corps mental »[3].

**La médiumnité.**

Il ne s'agit pas de proposer des solutions. Toujours est-il qu'il est possible, à travers ce toy model, de modéliser une large palette de croyances.

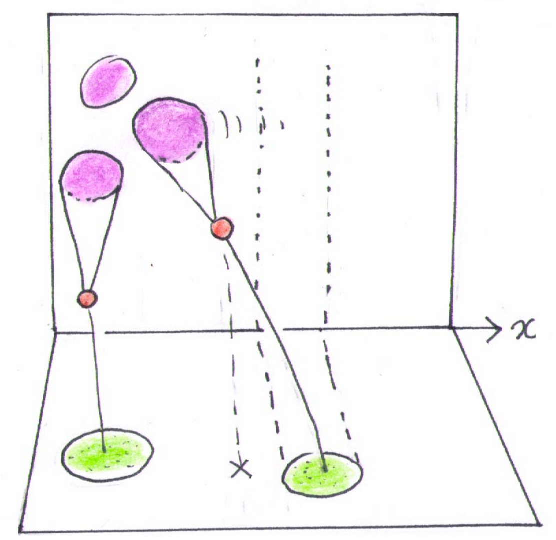
Considérons par exemple la médiumnité. Certains individus auraient la possibilité, dans un état particulier, qualifié de transe, de se faire l'expression d'autres consciences, en particulier de celles d'être décédés. Cela correspond alors au schéma ci après. Le personnage n'est plus « là » , mais « ailleurs ». :




**Sorties hors corps**

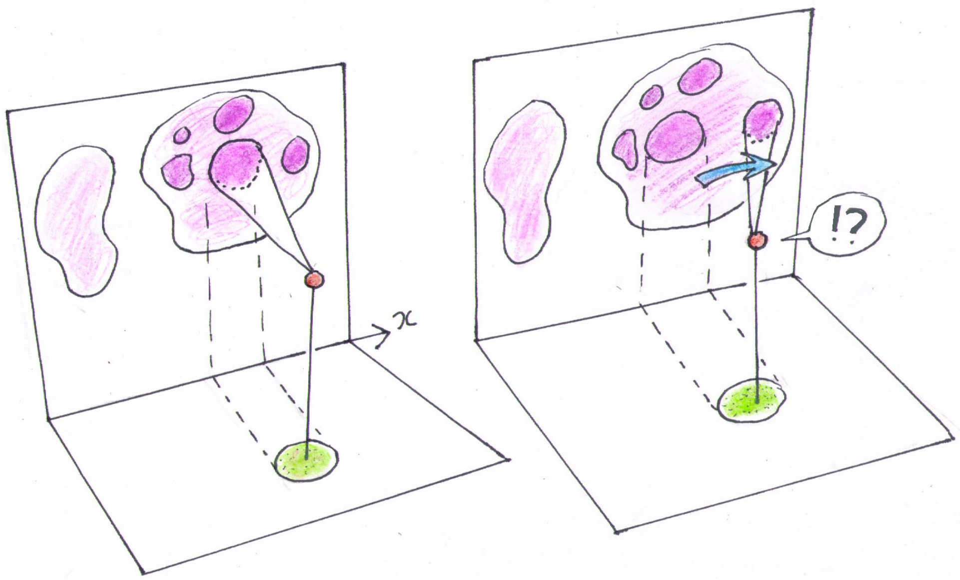
En continuant ce jeu de la modélisation, il est facile de représenter ces « sorties hors corps » que certains disent avoir vécues. Là c'est l'esprit de la personne, son double éthérique, son corps astral, peu importe le nom qu'on lui donne, qui quitte, spatialement, son corps physique et peut le cas échéant vivre des phénomènes qui seront alors qualifiés de perceptions extrasensorielles.

[3] Les textes indouïstes empilent différents « corps psychiques » comme des poupées russes.




**Régressions dans des vies antérieures.**

Autre schéma. Dans un modèle où la personne serait « pilotée » par une constellation de vies antérieures un tel dérapage, vécu dans un état de rêve, ou sous l'effet d'une suggestion hypnotique, correspondrait à cet autre schéma. Là, la conscience se « branche » soudain sur un autre « moi », à des éléments de conscience et de mémoire correspondant à une vie antérieure.




**Quelle image pour « l'au-delà** » ?

Les différentes religions offrent un kaléidoscope de modèles de l'au-delà, allant de Valhlala des Nordiques, du monde des esprits des animistes, du paradis et de l'enfer, pour les versions occidentales, à d'autres formes moins anthropocentrées ailleurs. Mais ce qui émergerait de cette tentative de modélisation serait que, quelle que soit la véritable structure de la noosphère humaine, celle-ci resterait locale, irrémédiablement liée à la planète qui porte cette vie.

Ainsi, les prétentions d'universalité des différentes religions terrestres perdraient quelque peu de leur signification sans que ceci incline en aucune manière à opter pour un matérialisme pur et dur ( qui n'est qu'une « religion » de plus, laquelle sert de dénominateur commun aux ade ptes de cette vision du monde). Nos religions deviendraient simplement humaines, teintées d'humanité.

**Et Dieu, dans tout cela ?**

C'était la phrase clé du journaliste Jacques Chancel, lors de ses interviews.

Si on cherche absolument à s'accrocher à ce concept, ce dieu ne serait autre que l'univers lui-même. On ne peut alors pas faire plus …universel. Les religions deviennent des structures de notre noosphère planétaire. De même que notre humanité est fragmentée en ethnies, ces structures constituent un vaste patchwork. Mais chaque adepte reste convaincu que sa vision du monde, soit ne vaut qu'à l'intérieur de sa propre ethnie, soit est la seule admissible pour l'ensemble des humains, quitte à s'ingénier à l'imposer à l'ensemble de ses semblables, de gré ou de force.

Les idéologies, à l'instar des religions, ne sont que d'autres systèmes organisés de croyances.

J'ai comparé le contenu de la noosphère à du soft. Nous sommes sur le point de créer des entités informatiques méritant l'appellation d'intelligences artificielles. Dotées d'autonomie, elles échapperont un jour à notre contrôle. Pire, « leur façon de penser » nous deviendra elle-même étrangère. Nous deviendrons incapables d'analyser leurs architectures, soit parce que celles-ci sont d'une trop grande complexité, soit parce qu'elles sont engendré des algorithmes nouveaux.

On pourrait comparer les dieux à des sortes d'entités, de consciences collectives, également dotés d'autonomie, de capacités d'intervention et d'autonomie. Je pourrais résumer cela en disant :

*Nous créons nos dieux et nos dieux nous créent*

En fait, quand les systèmes émergent du chaos primitif, il n'y a pas de structures sans croyances, véritables « atomes de pensée ». Et ces croyances s'agencent naturellement en constituant des idéologies, des religions et des … connaissances scientifiques, de manière plus ou moins opératoire.

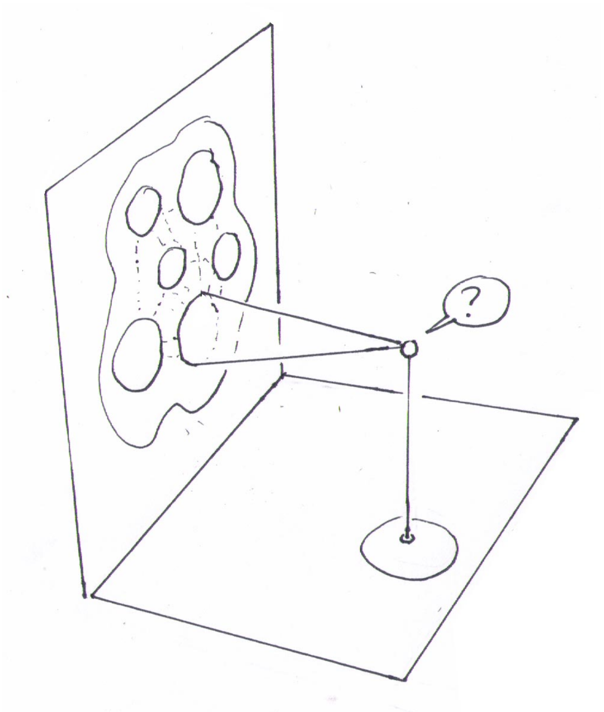
J'ai dit dans la vidéo que la noosphère pourrait avoir connu le même niveau d'organisation zéro que la géosphère et la biosphère. Lorsque le monde physique se réduit à des protons, des neutrons, des électrons, constituant un plasma parfaitement homogène, il est possible qu'il en soit de même, en ces époques reculées, pour la noosphère. On pourrait résumer cela en disant qu'à cette époque :

*Les dieux n'existent pas encore*

Tout ceci ne peut que nous inciter à prendre un peu de distance vis à vis de nos propres croyances, en cherchant à comprendre à quel jeu nous jouons, quel est le sens de la vie, de la présence des hommes sur la Terre.

**Le devenir post mortem.**

Les différentes religions prônent des schémas différents. Celui d'une personnalité multiple, déjà évoqué, achoppe avec un schéma du type réincarnation.




La personnalité humaine serait alors la résultante de plusieurs existences antérieures. C'est schématisé par cette sorte d'amibe hébergeant plusieurs consciences. Lorsqu'une nouvelle incarnation interviendrait, cette structure psychique engendrerait une nouvelle conscience, dont la structure serait la résultante de ces différents vécus. C'est le thème du Karma. Toute nouvelle conscience serait le produit de cette conjugaison, et éventuellement d'influences annexes, issues d'autres nébuleuses de la noosphère.

Dans d'autres visions des choses l'être humain ne vit pas totalement en dehors de son environnement animal ou végétal. On retrouve cette symbiose de la totémisation. Des symbioses psychiques pourraient alors se créer.

Certaines religions envisagent des réincarnations sous des formes non-humaines. Nous ne faisons ici que modéliser ce kaléidoscope de croyances, diverses et variées.

Notons au passage que, suite à une fréquentation étroite avec des humains certains animaux domestiques pourraient voir leur conscience animale s'humaniser partiellement, par une sorte de contagion des sentiments. Dans un sens positif comme dans un sens négatif, d'ailleurs.

Dans d'autres religions le passage à une vie consciente serait unique et la réincarnation exclue. On achoppe alors avec le thème d'un « jugement dernier ».

Quelle pourrait être « la bonne formule », celle qui serait la plus proche de la « vérité ?

Peut être toutes et aucune, au sens où le « bain psychique » dans lequel baigneraient des êtres humains déterminerait dans une certaine mesure leurs devenirs post mortem.

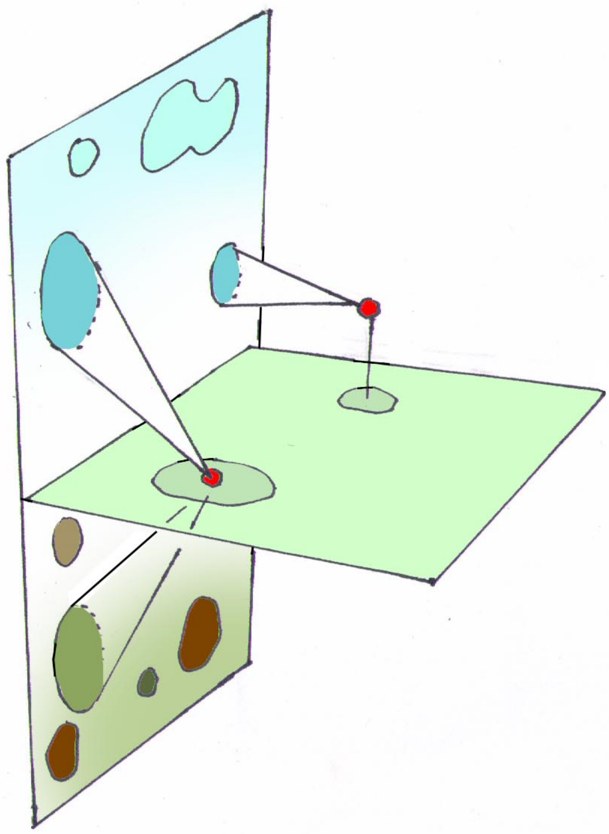
Dans les schémas orientaux la suite des réincarnations successives ne fait que traduire un raffinage de la personnalité des êtres humains. Dans quel but ? Les bouddhistes voient au terme de cette évolution psychique une « dissolution du moi », qu'on peut voir comme la dispersion finale de « l'égrégore-personnalité ». C'est une formule.

D'autres imaginent des existences dans l'au-delà porteuses de situations agréables ou désagréables. On voit poindre les idées d'enfer et de paradis.

Ce qu'on peut retenir, et se trouve être absolument général dans toutes ces cultures, est une symbolique « haut »bas ». Le paradis est « en haut », l'enfer est « en-bas ». Serait-ce à dire qu'il existerait pareille localisation pour les structures psychiques ? Les « bons esprits » évolueraient « dans le ciel » et les mauvais esprits « là où brûle le feu qui ne s' éteint jamais ». On pense alors au magma, sous nos pieds.

En revenant sur un schéma de réincarnation, pour pouvoir bénéficier de cette formule et pouvoir se « brancher » sur un être humain en cours de gestation, encore faudrait il posséder une structure psychique géographiquement proche du cheptel humain. Qu'adviendrait-il alors d'êtres si alourdis par « le poids de leurs péchés » qu'il auraient sombré sous le niveau du sol, coupés de la biosphère ?

Nous sommes amenés à prolonger notre toy model vers des niveaux inférieurs, quand la portion de masse imaginaire négative devient dominante.



On pourrait alors proposer un mode de devenir psychique inspiré du principe d'Archimède, en proposant la loi :

- *Tout corps astral plongé dans de la matière astrale reçoit une poussée, dirigée du bas vers le haut, égale au poids de matière astrale déplacée.*

Le « raffinage » de la personnalité passerait ainsi par l'accroissement du pourcentage de masse imaginaire positive, dans la psyché humaine. L'évolution inverse se traduirait par un naufrage. Tel serait le but poursuivi par les êtres humains.

Dans l'atmosphère, nos ballons météorologiques se dilatent quand ils prennent de l'altitude. Ainsi, alors que la densité de l'air environnant diminue, la poussée d'Archimède tend à se maintenir, du fait de l'élasticité de l'enveloppe. Si on pouvait produire des ballons dotés d'enveloppes rigides, incapables de se dilater, ceux-ci se stabiliseraient à l'altitude où la poussée d'Archimède égalerait leurs poids.

Quid des psychés humaines ? L'idée est amusante et mérite d'être explorée. Les êtres humains ordinaires ne parviendraient pas à échapper à la pesanteur terrestre, et se verraient contraints, « psychiquement », de cheminer à la surface du sol. Pourtant tout leur être tendrait à s'affranchir de cette pesanteur, en évacuant le maximum de masse imaginaire négative.

On trouverait donc différents êtres humains, en fonction des mérites ou des démérites accumulés. Certains seraient plus ou moins près de pouvoir s'affranchir de cette pesanteur, en « se sentant plus légers », plus ou moins, du reste.

Cette mécanique des fluides, de « psycho-fluides » tendrait vers quoi ? Vers un affranchissement complet vis à vis de l'attraction opérée par la noosphère terrestre ?

Quand des médiums parlent d'êtres humains décédés trouvant le moyen d'être libérés ils ont tous le même mot « ils partent vers la lumière ». Mais de quelle lumière parlent-ils ? Celle du Soleil ?

Notre toy model attribue à tout objet matériel une forme de contrepartie « astrale ». Ainsi des objets matériels pourraient-ils se voir investis d'une « charge psychique ». On voit poindre le thème des talismans ( ou d'objets « maléficiés »). Mais aussi thème central de cette discipline aussi vieille que l'humanité elle-même : l'astrologie.

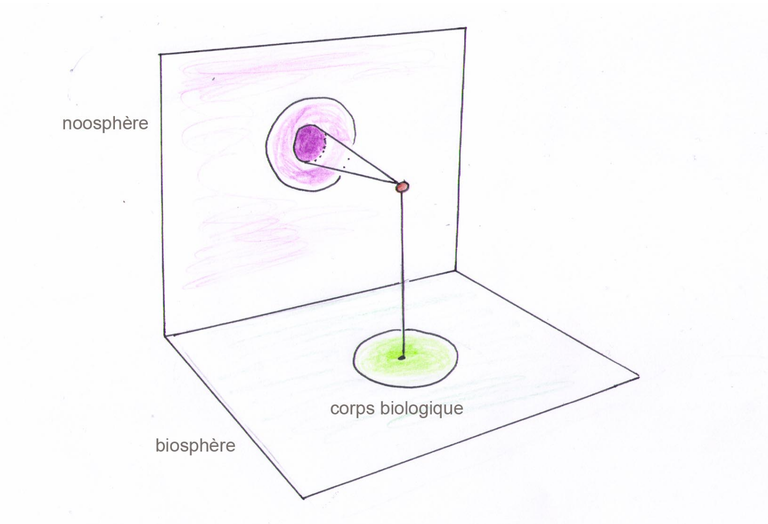
Reprenons notre image, avec ses deux « plans », en ayant prolongé le plan psychique vers des régions où domaine la masse négative. Là encore, la profondeur atteinte dépende de la « densité de l'âme » de l'individu. S'il lui est toujours possible de s'alléger il peut en revanche s'alourdir et ainsi descendre de plus en plus bas. Cette variation de densité se joue lors des existences, des incarnations successives. Faute de pouvoir faire l'expérience de nouvelles vies, on reste en l'état.

Les êtres ayant vécu une « chute psychique » au point de voir leur structure se trouver éloignée, en dessous du niveau de la biosphère, ce qui rend impossible tout « branchement » sur un nouvel être humain en gestation, n'ont plus comme ultime recours que de rechercher le parasitage d'êtres humains, moyennant quelques services en retour. Ils sont devenus « des mauvais esprits ». Bien sûr un tel commerce, pour l'âme-hôte, se traduira par son alourdissement inéluctable.

On voit que ce toy model épouse toutes les formes possibles imaginables des croyances humaines, et se prête à une modélisation de tous les phénomènes dits « paranormaux ». .

**L'inconscient.**

Ce petit toy model est décidément très amusant et se prête à toutes sortes d'interprétations. Selon celui-ci nos pensées, notre activité mentale ou affective ne peut être réduite à des réactions enzymatiques ou neuronales. Le modèle les situe dans un « ailleurs », dans un secteur de la noosphère. Ceci étant, la conscience a-t-elle accès à l'ensemble de nos pensées. Les psychologues répondront qu'il existe une par inconsciente de cette activité et de telles interactions. Je dessin ci-après est une modélisation d'une telle situation.




*Pensée consciente et nébuleuse périphérique de l'inconscient humain*

**Le rêve**

Quand nous rêvons, nous donnons libre cours à notre *imagination*. Serait-ce à dire que notre conscience basculerait dans un autre plan de réalité, en jouant avec des structures faites de masse imaginaire ? Comment interagissons nous avec des objets de nos rêves ? S'agit-il d'une activité strictement personnelle ou aurait-elle une composante sous la forme d'échanges avec d'autres entités ?

Comment se créent les objets, les décors de nos rêves ? Un ésotériste dirait que leurs créateurs sont les rêveurs eux-mêmes. D'où une technique de pratique de « rêve conscient » qu'un psychanalyste interprétera comme une action dans l'inconscient.

Là encore apparaît l'analogie avec le monde de l'informatique. Dans les schémas actuels de la psychologie le rêve humain n'est qu'une tâche laborieuse de classement de souvenirs récents, avec confrontation avec des souvenirs anciens, plus ou moins fantasmés. Nos ordinateurs font de même. On appelle cela une tâche de défragmentation.

Jusqu'à une époque récente nos ordinateurs personnels devaient se livrer, périodiquement, à ce travail de réorganisation de leur mémoire vive. Tous les programmeurs savent qu'alors il était possible de programmer ces tâches pour une certaine heure de la nuit[4]. Alors nos ordinateurs « rêvaient ».

Aujourd'hui est né Internet. Nos ordinateurs ont cessé d'être des entités indépendantes. Les messages vont et viennent. Les virus et les chevaux de Troie aussi, véritables malédictions pour les informaticiens.

Nos technologies sont des extensions des attributs du vivant. Nos technologies de la gestion des informations sont aussi, y compris avec ce monde virtuel que nous engendrons, d'autres prolongements de nous-mêmes.

**References** :

[1] J.M.Souriau : Structure des systèmes dynamiques. Dunod Ed. France, 1970 and Structure of Dynamical Systems. Boston, Birkhaüser Ed. 1997

[2] J.P.Petit : A Symplectic Cosmological Model. Progress in Physics, Vol. 14, jan. 2018 http://www.ptep-online.com/2018/PP-52-09.PDF

[3] J.M.Souriau : Géométrie et Relativité (in french). Ed. Hermann 1954

[4] J.P.Petit, G.D'Agostini : Cosmological Bimetric model with interacting positive and negative masses and two different speeds of light, in agreement with the observed acceleration of the Universe. Modern Physics Letters A, Vol.29 ; N° 34, 2014 ; Nov 10th DOI :10.1142/So21773231450182X

[5] J.P.Petit & G.D'Agostini : Cancellation of the singularity of the Schwarzschild solution with natural mass inversion process. Mod. Phys. Lett. A vol. 30 n°9 2015Doi:10.1142/S0217732315500510

[6] J.P.Petit & G.D'Agostini : Lagrangian derivation of the two coupled field equations in the Janus Cosmological Model. Astrophysics and Space Science 2015, 357 :67Doi : 10.1007/s10509-015-2250-6

[7] J.P.Petit, G.D'Agostini : Negative Mass hypothesis in cosmology and the nature of dark energy. Astrophysics And Space Science,. *A* **29**, 145-182 (2014)

[8] J.P.PETIT, Twin Universe Cosmology, Astrophys. and Sp. Science, **226**, 273-307, 1995

[9] J. P. Petit, Univers Enantiomorphes à flèches du temps opposées, CRAS du 8 mai 1977.

t. 285, pp. 1217–1221 (1977).

[10] J. P. Petit, Univers en interaction avec leur image dans le miroir du temps, CRAS du6

[4] Un travail effectué aujourd'hui en continu, comme « tâche de fond ».

juin, t. 284, série A, pp. 1413–1416 (1977).

[11] J.P.Petit, G. D'Agostini, N.Debergh : Physical and mathematical consistency of the Janus Cosmological Model (JCM). Progress in Physics 2019 Vol.15 issue 1

[12] J. P. Petit, P. Midy and F. Landhseat, Twin matter against dark matter, int. Conf. onAstrophysics and Cosmology, Where is the Matter?, Tracing Bright and Dark Matter with the New Generation of Large-Scale Surveys (Marseille, France, June 2001).

[13] J. P. Petit, Nuovo Cimento B. The missing mass problem. **109**, 697 (1994).

[14] J. P. Petit and G. D'Agostini, J.P.Petit, Negative mass hypothesis in cosmology and the nature of dark energy. Astrophysics and Space Science, 2014 sept. 20 th

[15] J.P.Petit, P.Midy and F.Landsheat: Twin matter against dark matter. Intern. Meet. on Atrophys. and Cosm. "Where is the matter ? ", Marseille 2001 june 25-29

[16] J.P.Petit : Physical and mathematical consistency of the Janus Cosmological Model. Progress in Physics, Vol. 15, issue 1 (2019)

[17] Y.Hoffman , D.Pomarède, R.B.Tully and H.Courtois : The Dipole Repeller, Anture Astronomy 1 , 0036 (2017) DOI 10.1038/s4 1550-016-0036

**ANNEXE**

<table>
<tr><td>Considérons l'espace de Minkowski dont la métrique est :

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

avec sa signature ( + - - - )

Ce qui correspond à la matrice de Gramm :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$</td><td>Considérons l'espace de Hermite dont la métrique est :

$$ds^2 = \hat{c}^2\overline{dt}\,dt - \overline{dx}\,dx - \overline{dy}\,dy - \overline{dz}\,dz$$

avec sa signature ( + - - - )

Ce qui correspond à la matrice de Gramm:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$</td></tr>
<tr><td>Introduisons le groupe de Lorentz L , axiomatiquement défini par :

$$L^T G\,L = G$$</td><td>Introduisons le groupe de Lorentz complexe L , axiomatiquement défini par :

$$L^* G\,L = G$$</td></tr>
<tr><td>et le quadrivecteur des translations spatio-temporelles :

$$\begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$</td><td>et le quadrivecteur des translations spatio-temporelles complexes :

$$\begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$</td></tr>
<tr><td>Formons le groupe de Poincaré :<br>(1)

$$g = \begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$</td><td>Formons le groupe de Poincaré complexe :<br>(1)

$$g = \begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$</td></tr>
<tr><td>Et l'élément de son algebra de Lie :<br>(2)

$$Z = \begin{pmatrix} G\omega & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$</td><td>Et son algèbre de Lie complexe :<br>(2)

$$Z = \begin{pmatrix} G\omega & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$</td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
| avec $$\omega^{T} = -\omega$$ | avec $$\omega^{*} = -\omega$$ |
| Formons : (3) $$Z' = g^{-1} Z\ g$$ | Formons : (3) $$Z' = g^{-1} Z\ g$$ |
| Nous obtenons : (4) $$\begin{pmatrix} G\omega' & \gamma' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L^{-1} G\omega L & G\omega C + L^{-1}\gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ | Nous obtenons : (4) $$\begin{pmatrix} G\omega' & \gamma' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L^{-1} G\omega L & G\omega C + L^{-1}\gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ |
| Comme $$GG = I \text{ and } L^{-1} = G\ {}^{t}L\ G$$ | Comme $$GG = I \text{ and } L^{-1} = G * L\ G$$ |
| (5) $$\omega' = L^{T} \omega L$$ | (5) $$\omega' = L^{*} \omega L$$ |
| (6) $$\gamma' = G L^{T} \omega C + G L^{T} G \gamma$$ | (6) $$\gamma' = G\ L^{*} \omega C + G\ L^{*} G \gamma$$ |

Introduisons l'action coadjointe $\mu \mapsto \mu'$ du groupe sur so n moment à travers la relation exprimant la dualité.

$$< Z , \mu > = < Z' , \mu' >$$

| | |
|---|---|
| On écrira le moment du groupe de Poincaré sous la forme : (7) $$\mu = \{\ M , P\ \} \text{ with } M^{T} = -M$$ | On écrira le moment, complexe, du groupe de Poincaré, complexe, sous la forme : (7) $$\mu = \{\ M , P\ \} \text{ with } M^{*} = -M$$ |
| Qui sera exprimé selon : (8) $$\mu \equiv \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\left(M\omega\right) + P^{T} G \gamma$$ | Qui sera exprimé selon : (8) $$\mu \equiv \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\left(M\omega\right) + P^{*} G \gamma$$ |
| Introduisons la dualité : | Introduisons la dualité : |

| | |
|---|---|
| (9)<br>$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(M\omega\right)+P^{T}G\gamma=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(M'\omega'\right)+P'^{T}\ G\ \gamma'$ | (9)<br>$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(M\omega\right)+P^{*}G\gamma=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(M'\omega'\right)+P'^{*}\ G\ \gamma'$ |
| Nous obtenons<br>(10)<br>$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(M\omega\right)+P^{T}G\gamma=$<br>$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(M'\,L^{T}\omega L\right)+P'^{T}\ L\omega C+P'^{T}L^{T}G\gamma$ | Nous obtenons<br>(10)<br>$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(M\omega\right)+P^{*}G\gamma=$<br>$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(M'\,L^{*}\omega L\right)+P'^{*}\ L\omega C+P'^{*}L^{*}G\gamma$ |
| L'identification des termes en $\gamma$ donne :<br>(11)<br>$P^{T}=P^{T}{}'L^{T}\quad\rightarrow\quad P=L\,P'$ | L'identification des termes en $\gamma$ donne :<br>(11)<br>$P^{*}=P'^{*}L^{*}\quad\rightarrow\quad P=L\,P'$ |
| Dans la trace on peut effectuer une permutation circulaire :<br><br>(12)<br>$\mathrm{Tr}\left(\ M'\,L^{T}\omega L\ \right)=\mathrm{Tr}\left(\ L\ M'\,L^{T}\omega\ \right)$ | Dans la trace on peut effectuer une permutation circulaire :<br><br>(12)<br>$\mathrm{Tr}\left(\ M'L^{*}\omega L\ \right)=\mathrm{Tr}\left(\ L\ M'L^{*}\omega\ \right)$ |
| L'identification des termes en $\omega$ donne :<br>(13)<br>$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\ M\omega\ \right)=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\ L\,M'L^{T}\omega\ \right)+P'^{T}\ L^{T}\omega C$ | L'identification des termes en $\omega$ donne :<br>(13)<br>$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\ M\omega\ \right)=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\ L\,M'\ L^{*}\omega\ \right)+P'^{*}\ L^{*}\omega C$ |
| Le second terme du second membre est égal au produit d'une matrice-ligne par une matrice-colonne. Ceci est égal au produit inversé. Schématiquement, le produit d'une matrice-ligne par une matrice-colonne :<br>(14)<br>$P'^{T}\ L^{T}\omega C=\mathrm{Tr}\left(\ L^{T}\omega C\ P'^{T}\ \right)$ | Le second terme du second membre est égal au produit d'une matrice-ligne par une matrice-colonne. Ceci est égal au produit inversé. Schématiquement, le produit d'une matrice-ligne par une matrice-colonne :<br>(14)<br>$P'^{*}\ L^{*}\omega C=\mathrm{Tr}\left(\ L^{*}\omega C\ P'^{*}\ \right)$ |
| Dans la trace on peut effectuer une permutation circulaire :<br>(15)<br>$P'^{T}\,L^{T}\omega C=\mathrm{Tr}\left(\ C\ P'^{T}\,L^{T}\omega\ \right)$ | Dans la trace on peut effectuer une permutation circulaire :<br><br>(15)<br>$P'^{*}\ L^{*}\omega C=\mathrm{Tr}\left(\ C\ P'^{*}\ L^{*}\omega\ \right)$ |

| | |
|---|---|
| D'où :<br>(16)<br>$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left( M\omega \right)=$<br>$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left( L\, M^T L^T\, \omega \right)+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left( C\, P'^{\,T} L^T\, \omega \right)$ | D'où :<br>(15)<br>$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left( M\omega \right)=$<br>$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left( L M^* L^*\, \omega \right)+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left( C\, P'^{*} L^*\, \omega \right)$ |
| Où $\omega$ est une matrice antisymétrique.<br>Nous savons que la trace d'une matrice est égal au produit d'une autre matrice par une matrice symétrique. Toute matrice peut être symétrisée ou antisymétrisée. De plus la trace du produit d'une matrice par une matrice antisymétrique est nul. Donc<br>(17)<br>$\mathrm{Tr}\left( A\omega \right)=\mathrm{Tr}\left[ \mathrm{antisym}\left( A \right)\times\omega \right]$ | Où $\omega$ est une matrice antisymétrique<br>Nous savons que la trace d'une matrice est égal au produit d'une autre matrice par une matrice symétrique. Toute matrice peut être symétrisée ou antisymétrisée. De plus la trace du produit d'une matrice par une matrice antisymétrique est nul. Donc<br>(17)<br>$\mathrm{Tr}\left( A\omega \right)=\mathrm{Tr}\left[ \mathrm{antisym}\left( A \right)\times\omega \right]$ |
| En appliquant cela à la matrice $C\ {}^tP\ {}^tL$ nous prenons la trace de son produit par une matrice antisymétrique $\omega$<br>(18)<br>$C\, P^T\, L^T=\mathrm{sym}\left( C\, P^T\, L^T \right)+\mathrm{antisym}\left( C\, P^T\, L^T \right)$ | En appliquant cela à la matrice $C\ {}^tP\ {}^tL$ nous prenons la trace de son produit par une matrice antisymétrique $\omega$<br>(18)<br>$C\, P^*\, L^*=\mathrm{sym}\left( C\, P^*\, L^* \right)+\mathrm{antisym}\left( C\, P^* L^* \right)$ |
| Mais :<br>(19)<br>$\mathrm{Tr}\left[ \mathrm{sym}\left( C\;\, P^T\, L^T \right)\times\omega \right]=0$ | Mais :<br>(19)<br>$\mathrm{Tr}\left[ \mathrm{sym}\left( C\;\, P^*\, L^{*} \right)\times\omega \right]=0$ |
| Ainsi:<br>(20)<br>$\mathrm{Tr}\left[ C\;\, P^T\, L^T\,\omega \right]=\mathrm{Tr}\left[ \mathrm{antisym}\left( C\;\, P^T\, L^T \right)\times\omega \right.$ | Ainsi<br>(20)<br>$\mathrm{Tr}\left[ C\;\, P^*\, L^*\,\omega \right]=\mathrm{Tr}\left[ \mathrm{antisym}\left( C\;\, P^*\, L^* \right)\times\omega \right.$ |
| (21)<br>$\mathrm{antisym}\left( C\;\, P^T\, L^T \right)=$<br>$\frac{1}{2}\left[ C\;\, P^T\, L^T+\left( C\;\, P^T\;\, L^T \right)^T \right]$ | (21)<br>$\mathrm{antisym}\left( C\;\, P^*\, L^* \right)=$<br>$\frac{1}{2}\left[ C\;\, P^*\, L^*+\left( C\;\, P^*\, L^* \right)^* \right]$ |
| (22)<br>$\left( C\, P^T\, L^T \right)^T=\left( P\, L^T \right)^T C^T=L\, P\, C^T$ | (22)<br>$\left( C\;\, P^*\, L^* \right)^*=\left( P\;\, L^* \right)C^*=L\, P\, C^*$ |
| (23) | (23) |

| | |
|---|---|
| $\text{antisym}\left( C\, P'^{T}\, L^{T} \right) = \frac{1}{2}\left( C\, P'^{T} L^{T} - L\, P'\, C^{T} \right)$ | $\text{antisym}\left( C\ P'^{*}\ L^{*} \right) = \frac{1}{2}\left( C\, P'^{*} L^{*} - L\, P'\, C^{*} \right)$ |
| (24) $\text{Tr}\left( C\, P^{T}\, L^{T} \right) = \frac{1}{2}\,\text{Tr}\left( C\, P'^{T}\, L^{T} - L\, P'\, C^{T} \right)$ | (24) $\text{Tr}\left( C\ P^{*}\ L^{*} \right) = \frac{1}{2}\,\text{Tr}\left( C\ P'^{*}\ L^{*} - L\ P'\, C^{*} \right)$ |
| Finalement : (25) $M = L\, M'\, L^{T} + C\, P'^{T}\, L^{T} - L\ P'\, C^{T}$ | Finalement : (25) $M = L\, M'\, L^{*} + C\ P'^{\,*}\, L^{*} - L\ P'\, C^{*}$ |
| (26) $P = L\, P'$ | (26) $P = L\, P'$ |

Nous pouvons intervertir - M et M' , P et P' et nous obtenons, pour l'application moment complexe la même expression que pour les réels, en changeant simplement « transposée » par « adjointe » : » :

$$\boxed{\begin{array}{c} M' = L\, M\ L^{T} + C\ P^{T}\ L^{T} - L\ P\, C^{T} \\ \\ P' = L\, P \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c} M' = L\, M\, L^{*} + C\ P^{*}\ L^{*} - L\ P\, C^{*} \\ \\ P' = L\, P \end{array}}$$

Pn peut mettre le moment sur la forme matricielle :

(27) $$\mu = \begin{pmatrix} M & -P \\ P^{T} & 0 \end{pmatrix} \qquad \mu = \begin{pmatrix} M & -P \\ P^{*} & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi l'action du groupe complexe sur son moment, complexe, devient :

(28) $$\boxed{\mu' = g\, \mu\, g^{T}} \qquad \boxed{\mu' = g\, \mu\, g^{*}}$$