6 juin 2019 Erratum, du à la fatigue, au surmenage.

Ca se trouve dans la vidéo française à 10'10

https://www.youtube.com/watch?v=rgaapx9Vnkc&t=2s

Heureusement, je n'ai pas rajouté cette connerie dans la version anglaise

https://www.youtube.com/watch?v=Yhgwkt1-oLE&t=16s

où je montre simplement que :

Avec Lorentz réel : $L^{-1} = G\ L^T G$

Avec Lorentz complexe : $L^{-1} = G\ L^* G$

Et ça, c'est exact.

Revoyons tout cela proprement.

On a la matrice du groupe de Poincaré

$$\begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on forme l'élément de l'algèbre de Lie :

$$\begin{pmatrix} \delta L & \delta C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette différenciation est prise autour de l'élément neutre, c'est à dire que :

$$L = I + \delta L$$

La matrice de Lorentz est définie axiomatiquement par :

$$L^T G\, L = G$$

Dans la vidéo j'ai écrit $L = I + \omega$ en « montrant » que ω est antisymétrique, ce qui est faux.

Voulant « apporter une précision » sur un calcul juste j'ai rajouté, par fatigue, un truc faux. En effet dans la vidéo à 13'35 on trouve :

We form the Poincaré group : (1) $$g=\begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$	We form the complex Poincaré group : (1) $$g=\begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
And its Lie algebra element : (2) $$Z=\begin{pmatrix} G\omega & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ with	And its complex Lie algebra element : (2) $$Z=\begin{pmatrix} G\omega & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ with
$$\omega^{T}=-\omega$$	$$\omega^{*}=-\omega$$

Ca, c'est exact, mais dans ce que j'ai ajouté, je confonds ω avec δL !!!

Or si ω est antisymétrique, δL ne l'est pas. C'est qui est $G\,\delta L$ antisymétrique.

En revenant à cette équation (2) comment montrer que l'élément δL se met sous la forme de $G\omega$, la matrice ω étant une matrice antisymétrique, il reste à le montrer.

Ca se déduit de deux choses :

- La définition axiomatique de L
- Le fait qu'on différencie au voisinage de l'élément neutre.

Je détaille étape par étape.

$$L^{T} G L = G$$

$$\delta\left[L^{T} G L\right]=0$$

$$\delta\left(L^{T}\right) G L + L^{T}\left(G\,\delta L\right)=0$$

$$\delta\left(L^{T}\right)=\left(\delta L\right)^{T}$$

$$\left(\delta L\right)^{T} G L + L^{T}\left(G\,\delta L\right)=0$$

Je replace L par la matrice unité, ce qui revient à négliger les termes du second ordre. Ca me donne :

$$\left(\delta L\right)^{T} G + \left(G\,\delta L\right)=0$$

Mais je remarque que :

$$(\delta \mathrm{L})^{\mathrm{T}}\mathrm{G} \ = (\mathrm{G}\,\delta \mathrm{L})^{\mathrm{T}}$$

Donc j'ai :

$$(\mathrm{G}\,\delta \mathrm{L})^{\mathrm{T}} + \mathrm{G}\,\delta \mathrm{L} = 0$$

Donc $\mathrm{G}\,\delta \mathrm{L}$ est une matrice anti symétrique que j'appelle ω

Donc, en tenant compte que GG = I je peux dans mon éléments de l'algèbre de Lie remplacer $\delta \mathrm{L}$ par $\mathrm{G}\,\omega$, qui est le produit de la matrice G par une matrice antisymétrique ω mais qui n'est pas une matrice antisymétrique.

Le transpose ça à mon groupe de Lorentz complexe. Ca me donne :

Calcul en complexe :

J'ai la définition de mon *groupe de Lorentz complexe* :

$$\mathrm{L}^{*}\mathrm{G}\,\mathrm{L} = \mathrm{G}$$

$$\delta\left[\mathrm{L}^{*}\,\mathrm{G}\,\mathrm{L}\right] = 0$$

$$\delta(\mathrm{L}^{*})\mathrm{G}\,\mathrm{L} + \mathrm{L}^{*}(\mathrm{G}\,\delta \mathrm{L}) = 0$$

$$\delta(\mathrm{L}^{*}) = (\delta \mathrm{L})^{*}$$

$$(\delta \mathrm{L})^{*}\,\mathrm{G}\,\mathrm{L} + \mathrm{L}^{*}(\mathrm{G}\,\delta \mathrm{L}) = 0$$

Je replace L par la matrice unité, ce qui revient à négliger les termes du second ordre. Ca me donne :

$$(\delta \mathrm{L})^{*}\,\mathrm{G} + (\mathrm{G}\,\delta \mathrm{L}) = 0$$

Mais je remarque que :

$$(\delta \mathrm{L})^{*}\mathrm{G} \ = (\mathrm{G}\,\delta \mathrm{L})^{*}$$

Donc j'ai :

$$(\mathrm{G}\,\delta \mathrm{L})^{*} + \mathrm{G}\,\delta \mathrm{L} = 0$$

Donc $\mathrm{G}\,\delta \mathrm{L}$ est une matrice antihermitique que j'appelle ω

Donc, en tenant compte que GG = I je peux dans mon éléments de l'algèbre de Lie remplacer δL par Gω , qui est le produit de la matrice G par une matrice antihermitique ω mais δL n'est pas une matrice antihermitique.