GÉNÉRATION TEMPORELLE DU PLAN PROJECTIF (1/2)

JACQUES SIBONI

Document #L950203A

List of Figures

Le plan projectif est une surface non-orientable qui n'est pas représentable (plongeable) dans notre espace à trois dimensions usuel.

Je vais essayer de décrire ici des méthodes pour générer le plan projectif en dimension 3 en utilisant le temps comme quatrième dimension.

Puis enfin j'indiquerai dans un deuxième article mes axes de recherche: les conséquences de ce type de génération pour ce qui est de *la dialectique des identifications* et plus généralement pour *le temps logique*.

Texte présenté à La Lettre de Topologie, 20 mai 95
Typeset by $\mathcal{AMS}$-LaTeX.

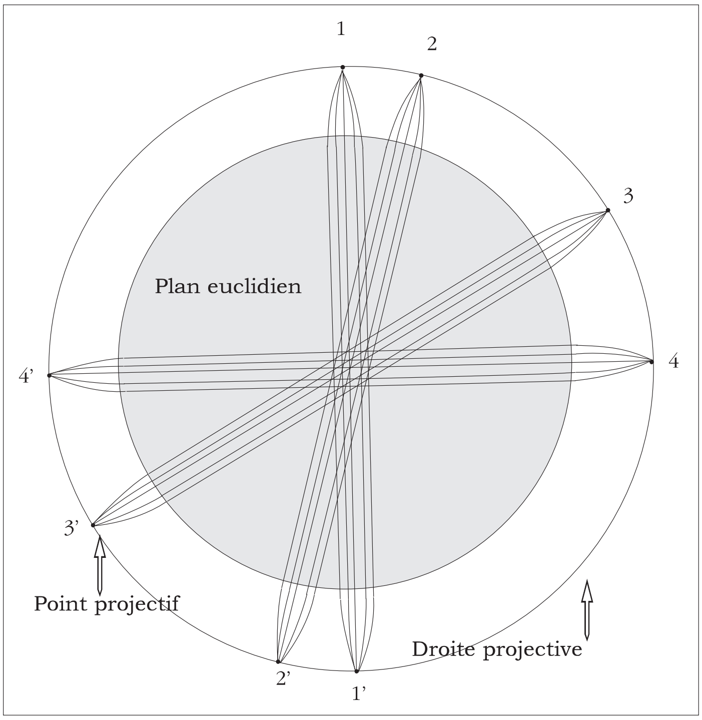

FIGURE 1. Le plan projectif

1. Eléments de géométrie du plan projectif

Le plan projectif est un objet qui date de la découverte des lois de la perspective par Leon B. Alberti et Filippo Brunelleschi à la Renaissance. C'est une formalisation des points de fuites et des parallèles qui se rejoignent sur le tableau comme cela est montré pour un plan particulier sur la figure 1. Cette technique est également au fondement des techniques de dessin et de projection en cartographie. Pour montrer la variété des façons de concevoir le plan projectif, je vais en décrire quelques unes.

1.1. **Complétion du plan euclidien.** Pour le construire, on trace dans la figure 1 sur le plan (affine) quelques droites parallèles, et on leur ajoute un point à l'infini dans la direction où elles ont l'air de se rejoindre. En fait on ajoute deux points diamétralement opposés. Mais on considère que ces deux points n'en font qu'un, comme s'ils avaient fait le tour d'une sphère. En effet, si je suis sur des rails parallèles, ils ont l'air de se rejoindre aussi bien devant moi que derrière moi.

Ce point vient ainsi compléter toutes les droites ayant une certaine direction. On dit que ce point est *un point projectif.* Toutes les droites de cette direction se projettent vers ce point. C'est un point de fuite. On voit bien qu'on dispose dès lors d'un moyen de dessiner des voies de chemin de fer sur un tableau.

A chaque direction correspond un point projectif particulier. Je peux joindre tous les points projectifs du plan par une ligne. A première vue, cette ligne est un cercle à l'infini qui *entoure* le plan.

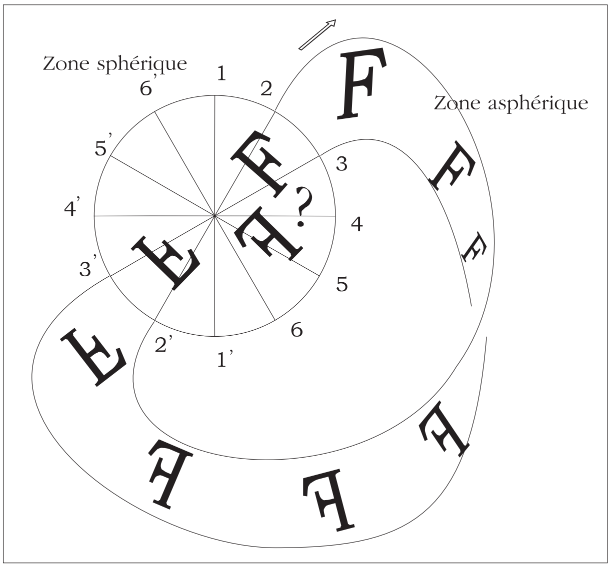

FIGURE 2. Les diamètres

Cette ligne a deux particularités. Par sa caractéristique de bordure elle complète le plan en lui ajoutant une ligne de plus. Cette ligne est appelée *droite projective*.

J'ai indiqué plus haut que chaque paire de points appartenant à la même direction ne faisaient qu'un. Cette droite projective se replie puisque chaque point est, pour ainsi dire 'double'. Si je parcours cette ligne à partir de 1 sur la figure 2, en 2 je suis également en $2'$, en 3 je suis en $3'$, et en 4 en $4'$.

Déjà, il n'est plus possible de concevoir cet objet dans l'espace 3D. Cependant on peut noter qu'une droite, courbe joignant des droites parallèles qui se rejoignent à l'infini, c'est pas très facile à dessiner non plus. Ce plan complété par la droite projective est appelé *plan projectif*.

Voyons tout de suite la propriété caractéristique de ce plan. Dans la figure 2 l'existence des points doubles fait qu'on peut passer indifféremment de chaque valeur $1, 2, 3, 4$ à $1', 2', 3', 4'$. Par exemple prolongeons le segment $2 - 3$ par une bande qui rejoint le segment $2' - 3'$ en respectant la connexion 2 avec $2'$ et 3 avec $3'$. On trace un **F** en $2 - 3$ et on le fait glisser le long de la bande jusqu'en $2' - 3'$. Une fois qu'il aura rencontré le **F** de départ on constatera qu'ils ne peuvent plus se superposer. Le plan projectif a cette propriété en tous points, il est *non-orientable*.

1.2. **Classes des droites projectives de l'espace.** Je peux également le concevoir comme j'ai conçu la droite projective. Pour cela je trace une série de plans parallèles. Dans une direction donnée, je peux joindre tous les plans par une droite projective à l'infini. En faisant de même dans toutes les directions de l'espace, je crée une infinité de droites projectives. Celles-ci une fois jointes, enveloppent un plan projectif.

1.3. **Génération à partir d'un anneau de Moebius.** Il est possible de rendre compte du plan projectif également d'une autre façon. Pour cela il faut partir d'un anneau de Moebius dont le bord serait en fil de fer et la

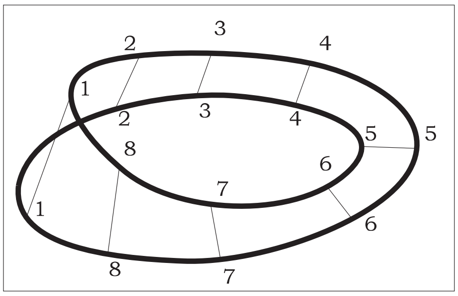

FIGURE 3. Moebius en élastique

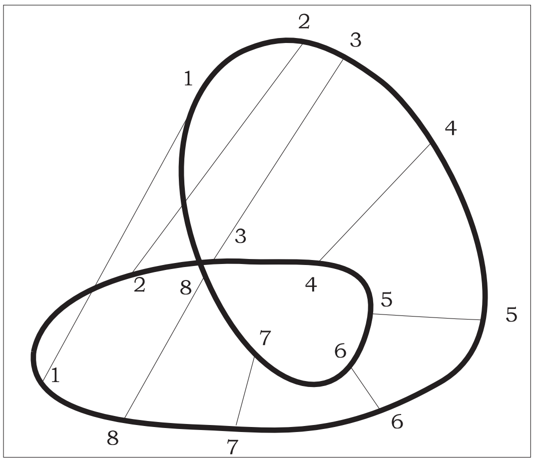

FIGURE 4. Déformation 1

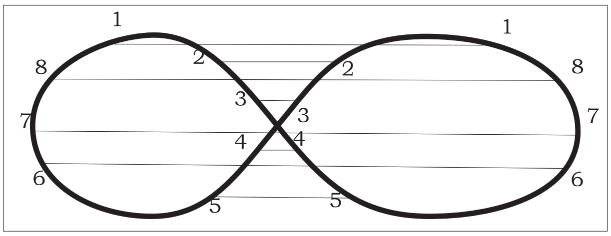

FIGURE 5. Déformation 2

surface faite d'un grand nombre d'élastiques tendus comme cela est présenté figure **3**. Par les déformations continues des figures 4, 5 et **6** on atteint la forme de la figure 7. En imaginant une infinité d'élastiques formant ainsi un plan, un **F** se retrouve tête-bêche et en miroir quand il évolue le long d'un diamètre. Je peux suturer un disque sur le cercle de la figure 7. Quand le **F** parcourt alors le disque il ne peut plus se superposer à la forme précédente.

La surface suturée est un plan projectif, la surface à un bord est un anneau de Moebius en présentation de *cross-cap*.

1.4. **Génération par projection centrale ou gnomonique.** Lorsqu'un pilote d'avion veut aller d'un endroit de la terre à un autre, il doit établir un itinéraire. S'il n'a pas besoin de faire d'escale, il va choisir le chemin le plus

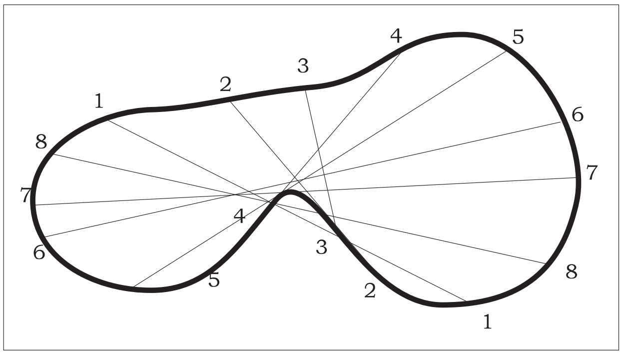

FIGURE 6. Déformation 3

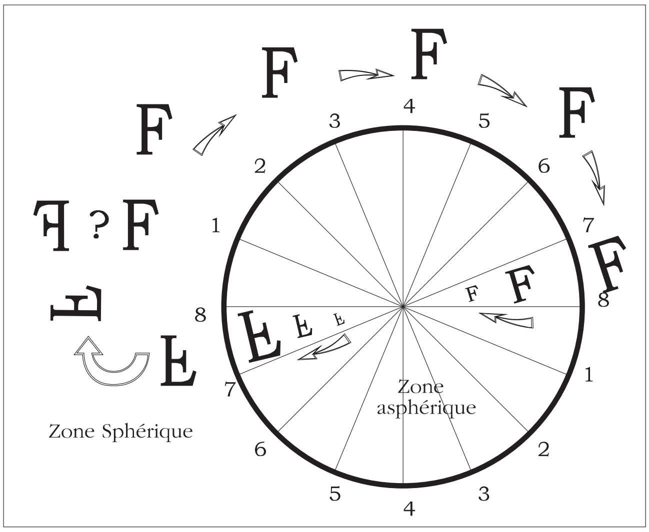

FIGURE 7. Déformation 4

court car il consommera moins de carburant. S'il prend une carte aérienne ordinaire[1], et qu'il trace une droite, et bien il ne choisira pas la route la plus courte.

En général une droite sur une carte ne suit pas le chemin le plus court. Le chemin le plus court est ce qui s'appelle une *géodésique* ou *grand cercle*.

Il est plus simple pour lui de disposer d'une projection dans laquelle une géodésique est une droite. Cette projection existe, elle s'appelle *projection azimuthale gnomonique*. Derrière ce nom se cache tout simplement la figure qu'on obtient en projetant une sphère sur un plan en prenant comme centre de projection le centre de la sphère. Dans cette projection chaque droite suit un grand cercle. Chaque droite est une droite projective.

Pour rendre sensible cette réalité, imaginez-vous installé au centre d'une sphère transparente, sur laquelle est dessiné de nombreux grands cercles (des méridiens entre autres). Tous ces cercles sont centrés sur le centre de la sphère, si je suis sur ce centre le les verrai comme des droites. Ils se projetteront comme tels sur un plan.

[1]Projection conique conforme de Lambert

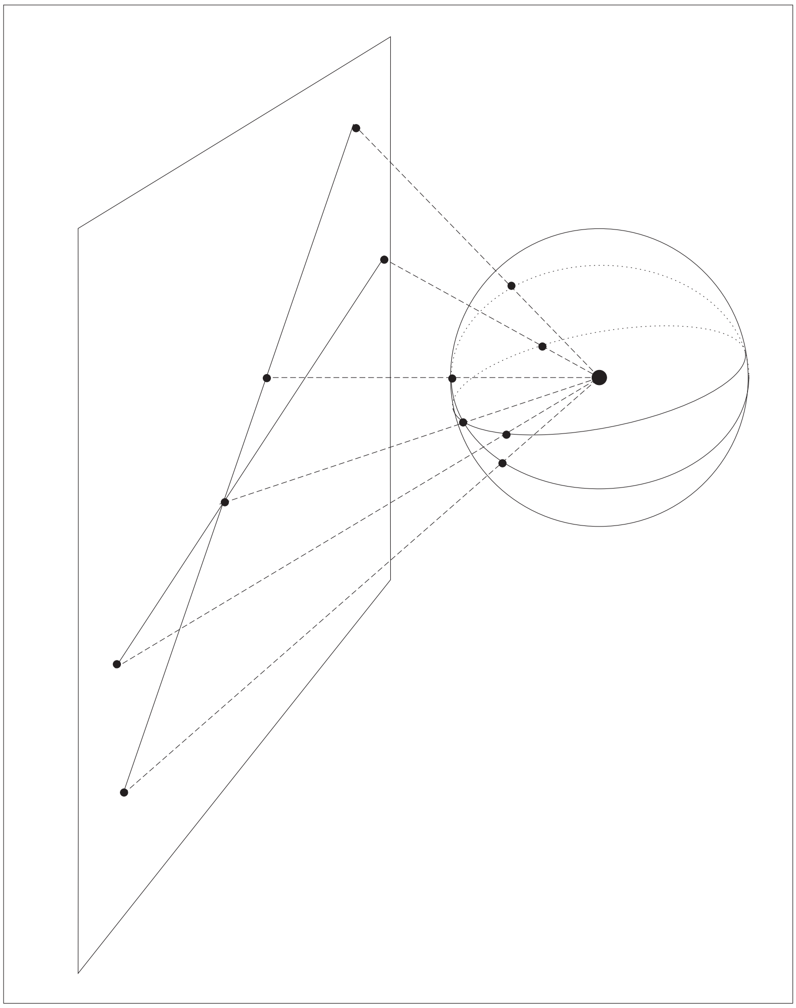

FIGURE 8. Projection gnomonique d'une sphère

Je n'en dirai pas plus sur ce point, observez la figure 8. Pour ce qui nous intéresse, il suffit de se rappeler que ces cartes sont des portions de plan projectif.

1.5. **En résumé.**

- La *droite projective* est une droite du plan euclidien complétée par un point appelé *point projectif.*
- Le *plan projectif* est un plan de l'espace euclidien complété par une *droite projective.*
- Toutes les droites parallèles du plan se coupent en un point projectif.
- Tous les plans parallèles de l'espace se coupent le long d'une droite projective.
- Tous les points projectifs d'un plan sont les points d'une droite projective.
- Toutes les droites projectives de l'espace sont les droites d'un plan projectif.

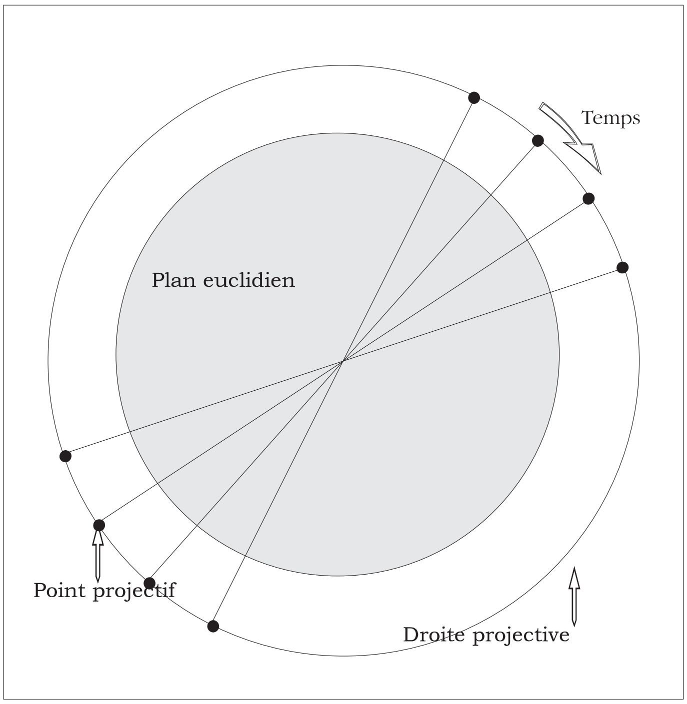

FIGURE 9. Droite projective tournante

- Le plan projectif est une surface non-orientable.

Un peu plus formellement, on peut dire:

- Soit le plan affine $\mathcal{E}_2$ muni d'une origine O.
  Tous les points alignés du plan constituent une classe qu'on appelle *point projectif*.
  L'ensemble des classes est la *droite projective*.
- Soit l'espace affine $\mathcal{E}_3$ muni d'une origine O.
  Tous les points alignés de l'espace constituent une classe qu'on appelle *point projectif*.
  L'ensemble des classes est le *plan projectif*.

2. Génération temporelle

2.1. **Génération par une droite projective.** Dans la figure 1, on voit qu'à chaque direction correspond une droite projective. Ainsi une droite projective tournant selon toutes les directions sur 180 degrés engendre un plan projectif. C'est ce qui est montré figure 9.

Ce type de génération n'est pas uniquement abstrait. C'est ce plan projectif que nous générons lorsque, ayant porté notre regard au loin dans une direction, nous balayons du regard toutes les directions sur 180 ou 360 degrés. Le plan projectif ainsi généré est identique au plan de la figure 1. L'inconvénient de cette construction est qu'il faut faire un détour par la ligne d'horizon pour construire le plan projectif. La ligne d'horizon, c'est relativement loin.

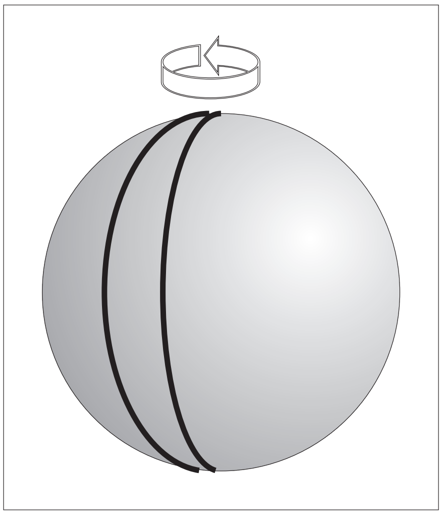

FIGURE 10. Génération temporelle de la sphère

2.2. **Génération par un cercle.** La droite projective utilisée ci-dessus est une courbe fermée. Mais elle se ferme en passant par l'infini. Le point de fuite de mon regard devant moi est le même que celui qui est derrière moi à l'infini. Ce plan projectif ne sait pas se générer dans l'espace euclidien à trois dimensions, il a besoin de la droite projective.

Maintenant y-a-t-il une façon de générer un plan projectif dans l'espace euclidien, en n'utilisant que des objets géométriques euclidiens et en évitant un passage par la limite infinie?

Pour expliciter ce type de génération, je commence par utiliser un cercle dans un espace euclidien de dimension 3, dans $\mathbb{R}^3$. c'est un cercle au sens topologique du terme, c'est une ligne fermée de dimension 1, déformable et élastique.

Cette ligne fermée va se déplacer dans l'espace. Au moment où le déplacement et la déformation se produisent, j'ouvre l'obturateur d'un appareil photographique, et je le ferme à la fin du mouvement. Sur la photo développée, je verrai la projection en deux dimensions de l'ensemble des positions que la ligne a occupées dans l'espace.

Si cette ligne est un cerceau, et que je le tourne sur lui-même de 180 degrés, je génère ainsi une sphère. Elle existe dans l'espace euclidien et se projettera comme tel sur la plaque photographique. La figure 10 montre ce qui sera enregistré sur la photo.

En laissant ouvert l'obturateur de l'appareil photo, j'ai créé une quatrième dimension, le temps. Cette sphère est généré dans un espace-temps de dimension 4, $\{\mathbb{R}^3, \mathbb{T}\}$.

Qu'ai-je pu fabriquer jusqu'à maintenant?

- Une ligne fermée de dimension 1,
- plongée dans l'espace euclidien de dimension 3,
- génère une sphère de dimension 2,
- dans un espace-temps de dimension 4.

Si le chemin que je parcours avec le cercle est plus complexe ou quelconque, la surface générée se recoupera dans l'espace. On dit alors que cette surface

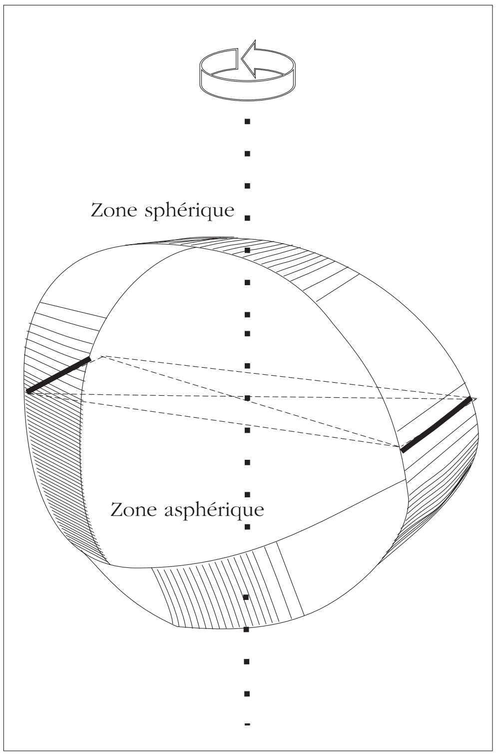

FIGURE 11. Génération temporelle du plan projectif

présente des *lignes d'immersion* dans l'espace 3. Ces lignes n'existent pas dans l'espace-temps utilisé. Si le cercle se recoupe, ce n'est pas dans le même temps. Ces lignes n'existent pas dans la dimension 4.

2.3. **Génération par un anneau de Moebius.** Je vais chercher maintenant à générer de cette façon, avec une ligne fermée[2], un plan projectif.

Dans l'exemple précédent, la figure générée est une sphère. Maintenant au lieu d'un cercle, je vais utiliser comme générateur un ruban de Moebius. Sur celui de la figure 11 on peut repérer deux zones distinctes, une zone orientable au nord et une zone non-orientable au sud.

En séparant les zones je peux générer avec le nord un hémisphère qui est équivalent au disque de la figure 2.

Avec le sud je peux générer la "blague à tabac" de la figure 7.

Si je ne sépare pas les zones et que je fais tourner l'anneau sur lui-même suivant l'axe nord-sud sur 180 degrés, je génère un plan projectif.

Pour coller au dessin de la figure 7, j'ai dû donner huit positions distinctes à l'anneau pour produire les huit quadrants du dessin. J'ai déclenché l'obturateur huit fois pour produire ce plan projectif *discret*.

Sur la plaque photographique j'ai la projection de la trace du plan projectif qui s'est généré temporellement. Une photographie stéréoscopique permettrait au spectateur de voir la trace temporelle en relief de cette génération.

En réduisant la largeur de la bande, je devrai déclencher l'obturateur plus souvent pour donner l'impression, sur la plaque, d'une surface continue.

[2]De préférence plongeable dans l'espace 3.

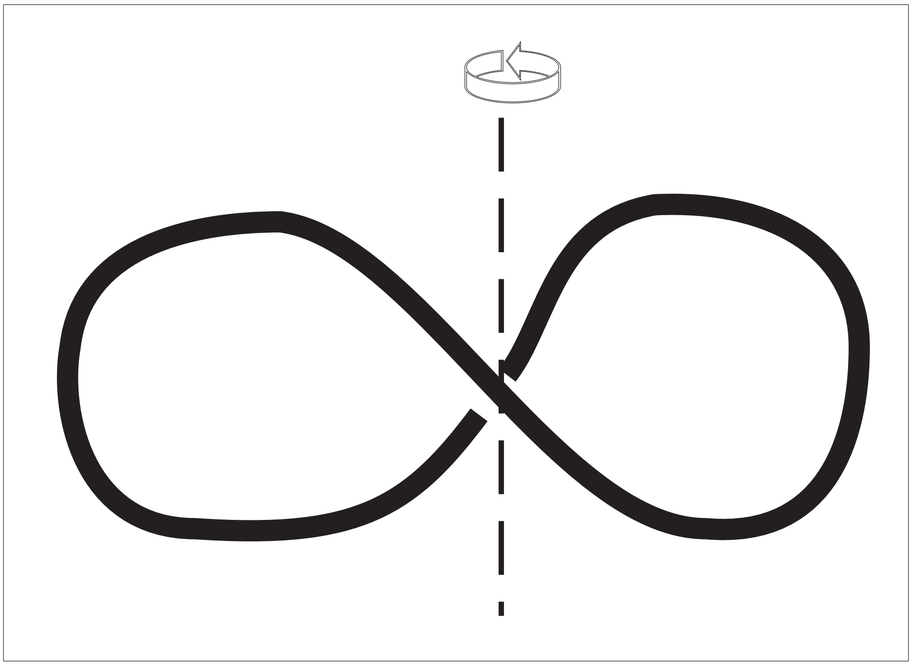

FIGURE 12. Lacet en huit

Je peux aussi – virtuellement – réduire la largeur pour ne laisser que le bord. L'anneau devient une ligne sans point. Je la fais tourner de 180 degrés suivant l'axe nord-sud, je génère ainsi un plan projectif continu.

2.4. **Génération par un lacet en huit.** Je vais indiquer maintenant une façon encore plus intuitive de générer un plan projectif. Ce mode nécessite l'utilisation d'un lacet replié en forme de huit. On peut le voir sur la figure 12. Que se passe t-il si je le fais tourner de 180 degrés suivant l'axe indiqué sur la figure?

La trace produite est celle représentée sur les figures 13 et 14. Ces formes non-orientables concrétisent bien la trace en dimension 3 du plan projectif.

Ces formes sont équivalentes à celles de la figure 15. La différence est que la ligne d'immersion est ramenée à une seule singularité ponctuelle, comme dans le cas de la blague à tabac.

2.5. **Conclusion de la partie géométrique.** Pour conclure cette partie géométrique, je noterai ces quatre résultats intéressants:

1. La *ligne sans point* et la *droite projective* sont une seule et même chose.
2. Un anneau de Moebius permet de générer un *plan projectif discret.*
3. Une *ligne sans point* permet de générer un *plan projectif continu.*
4. Un lacet en huit permet de générer un plan projectif continu.

Sur les figures 15 et 16 sont représentés des vues en trois dimensions d'un plan projectif dans la présentation qu'utilise Lacan. Ils diffèrent de celui dont je viens d'indiquer la génération en ceci que la partie asphèrique du

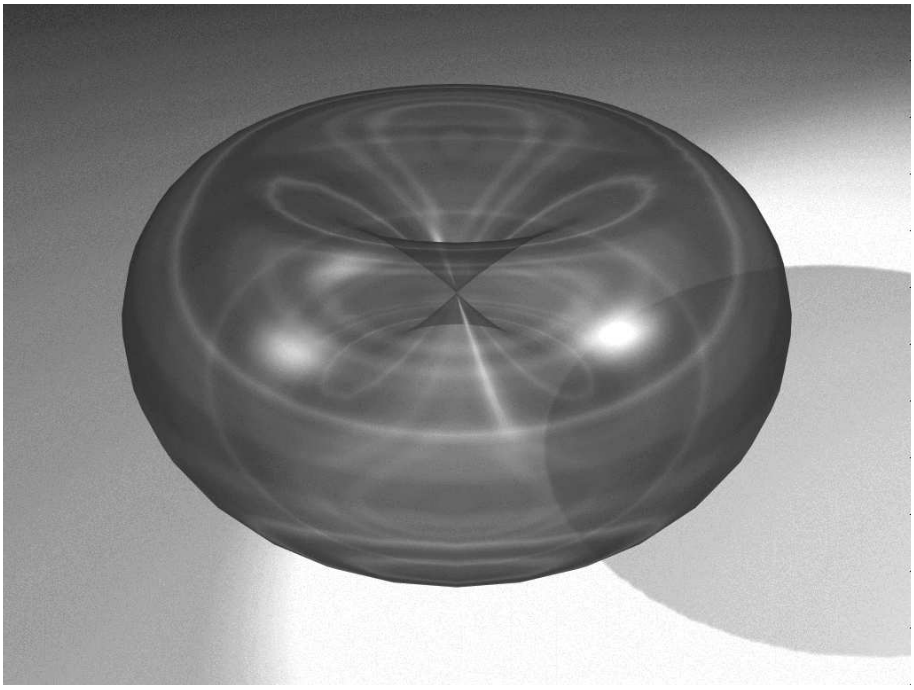

FIGURE 13. Plan projectif à singularité ponctuelle

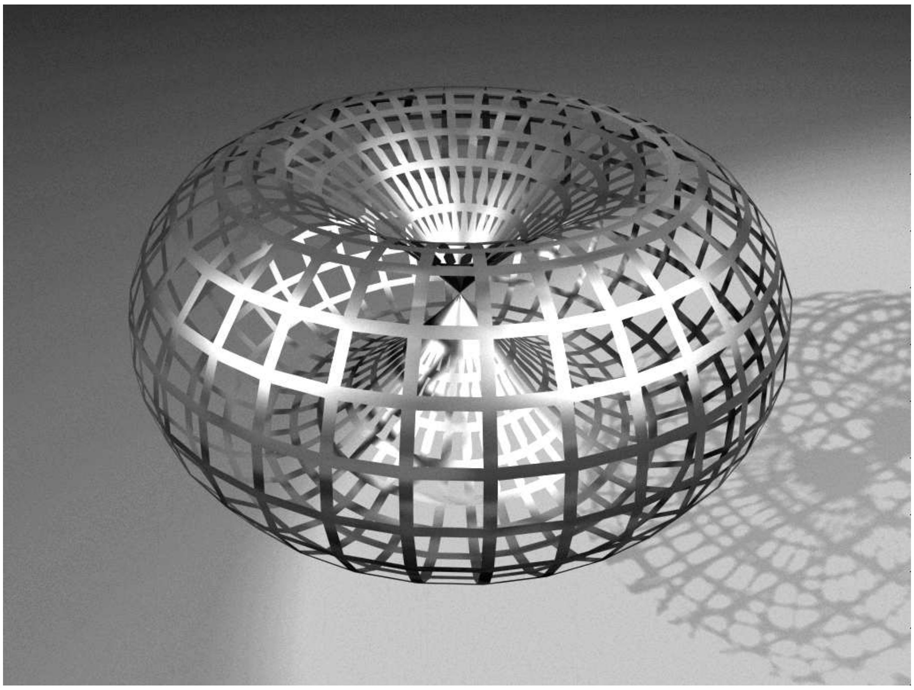

FIGURE 14. Plan projectif à singularité ponctuelle

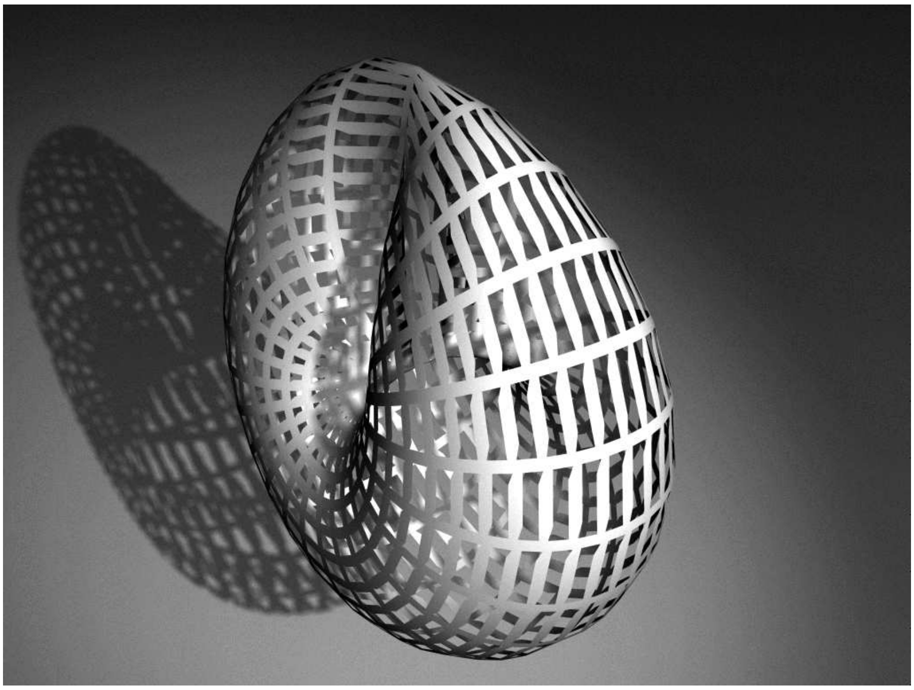

FIGURE 15. Plan projectif immergé

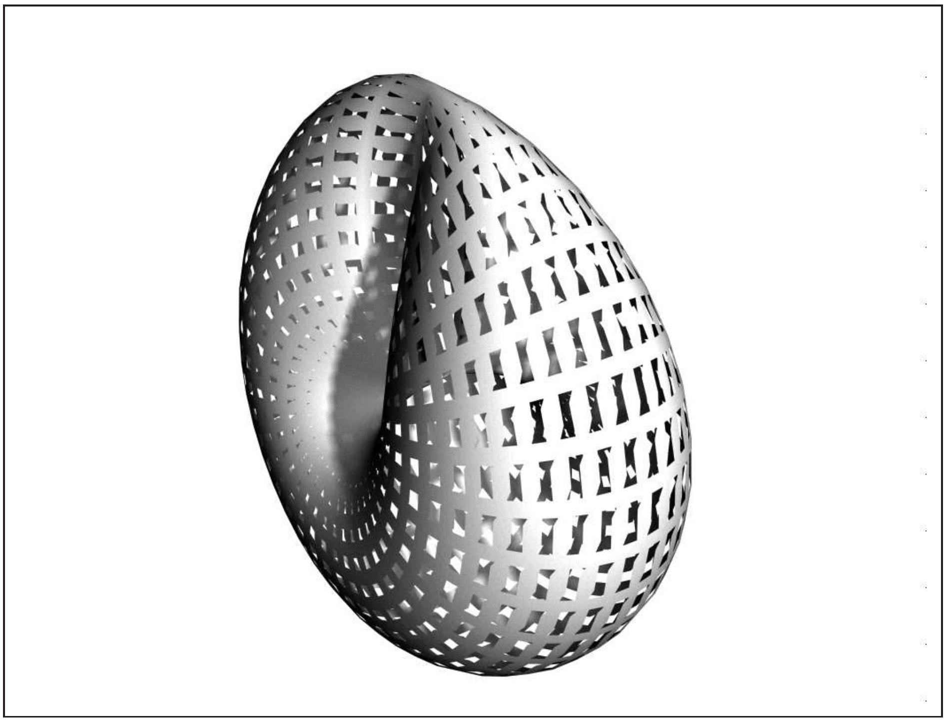

FIGURE 16. Plan projectif immergé

plan est générée par un anneau de Moebius dont la bande parcourt la ligne d'immersion.

8, passage Charles Albert, 75018 Paris, France
E-mail address: jacsib@lutecium.fr