PLAN PROJECTIF ET SUJET LACANIEN — QUELQUES EXEMPLES

JACQUES SIBONI

Document #L960201A

ABSTRACT. Le plan projectif est une surface non-orientable qui n'est pas représentable (plongeable) dans notre espace à trois dimensions usuel. Après une reprise de quelques définitions et propriétés du plan projectif, je donnerai quelques exemples des usages que fait Jacques Lacan de cet objet topologique. Il s'agit notamment de représentations qui mettent en jeu le sujet de l'inconscient. Cependant ce qui est présenté n'est pas un travail mathématique formel et comprend des trivialisations qui pourront heurter des mathématiciens.

LIST OF FIGURES

Date: 20 mars 1996, reformaté January 15, 2000.
Texte présenté à TCPP, 29 mars 1996.
Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-LaTeX.

1. Éléments de géométrie du plan projectif

Le plan projectif est un objet qui date de la découverte des lois de la perspective par Leon B. Alberti et Filippo Brunelleschi à la Renaissance. C'est une formalisation des points de fuites et des parallèles qui se rejoignent pour donner une impression de profondeur de champ sur un tableau ou un dessin. Cette impression c'est la perspective.

Imaginons un peintre debout dans un paysage, et élevons-nous très haut au dessus de lui. Si je trace les parallèles qu'il voit dans chaque direction du plan, elles semblent se rejoindre à l'infini comme cela est montré sur la figure 1 page ci-contre. Cette technique est également au fondement des techniques de dessin et de projection en cartographie comme on le verra figure 8 page 7.

Le plan projectif est un objet mouvant qui peut s'aborder par plusieurs biais. Pour montrer la variété des façons dont on peut le concevoir, je vais en décrire quelques unes.

1.1. **Complétion du plan euclidien.**

On peut le construire en complétant le plan euclidien. Pour cela on trace dans la figure 1 page ci-contre sur le plan (affine) quelques droites parallèles, et on leur ajoute un point à l'infini dans la direction où elles ont l'air de se rejoindre. En fait on ajoute deux points diamétralement opposés. Mais on considère que ces deux points n'en font qu'un, comme s'ils avaient fait le tour d'une sphère. En effet, si je suis sur des rails parallèles, ils ont l'air de se rejoindre aussi bien devant moi que derrière moi.

Ce point vient ainsi compléter toutes les droites ayant une certaine direction. On dit que ce point est *un point projectif*. Toutes les droites de cette direction se projettent vers ce point. C'est un point de fuite. Celui-ci permet de dessiner des voies de chemin de fer sur un papier à dessin.

A chaque direction correspond un point projectif particulier. Je peux joindre tous les points projectifs du plan par une ligne. A première vue, cette ligne est un cercle à l'infini qui *entoure* le plan.

Par sa caractéristique de bordure cette ligne *complète le plan* en lui ajoutant une ligne de plus. Elle porte le nom de *droite projective*.

J'ai indiqué plus haut que chaque paire de points appartenant à la même direction ne faisaient qu'un. Cette droite projective se replie puisque chaque point est, pour ainsi dire 'double'. Ainsi quand je parcours cette ligne à

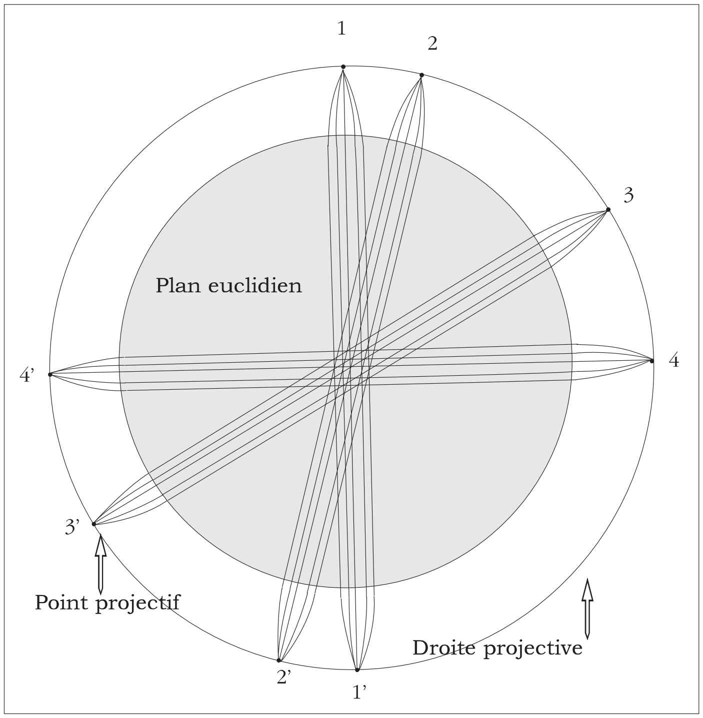

FIGURE 1. Le plan projectif

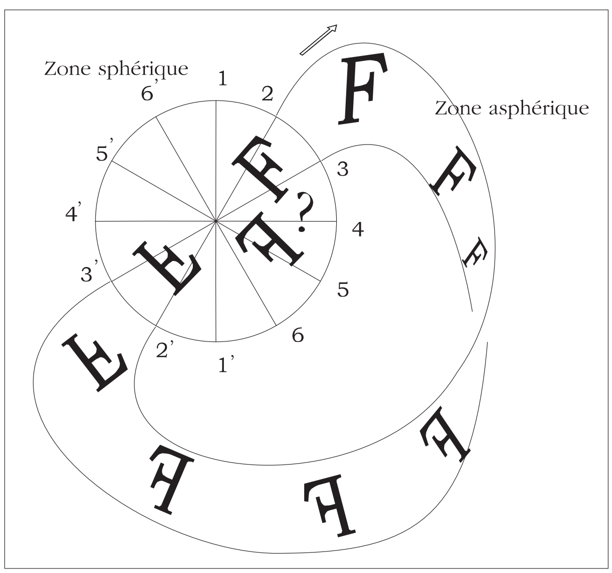

FIGURE 2. Les diamètres

partir du point 1 de la figure 2, en 2 je suis également en $2'$, en 3 je suis en $3'$, et en 4 en $4'$[1].

[1]Cette construction est décrite en détail par Ian Stewart dans *Visions géométriques*. [Ste94, pp 87–96].

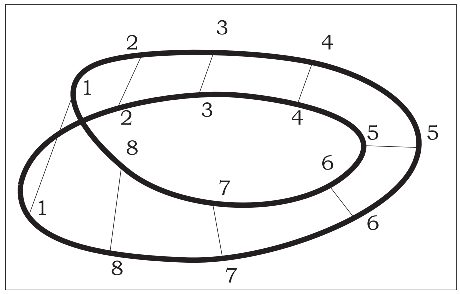

FIGURE 3. Anneau de Möbius avec élastiques

Déjà, on sent bien qu'il n'est plus possible de concevoir cet objet dans l'espace à trois dimensions usuel. Cependant on peut noter qu'une 'droite courbe' joignant des droites parallèles qui se rejoignent à l'infini, ce n'est pas très facile à dessiner non plus.

Ce plan complété par la droite projective est appelé *plan projectif.*

Voyons tout de suite la propriété caractéristique de ce plan. Dans la figure 2 page précédente l'existence des points doubles fait qu'on peut passer indifféremment de chaque valeur $1, 2, 3, 4$ à $1', 2', 3', 4'$. Par exemple prolongeons le segment $2 - 3$ par une bande qui rejoint le segment $2' - 3'$ en respectant la connexion 2 avec $2'$ et 3 avec $3'$. On trace un **F** en $2 - 3$ et on le fait glisser le long de la bande jusqu'en $2' - 3'$. Une fois qu'il aura rencontré le **F** de départ on constatera qu'ils ne peuvent plus se superposer.

Le plan projectif a cette propriété en tous points, il est *non-orientable*[2].

1.2. **Classes des droites projectives de l'espace.** Il est également possible de concevoir le plan projectif comme a été décrite la droite projective. Pour cela je trace une série de plans parallèles. Dans une direction donnée, je peux joindre tous les plans par une droite projective à l'infini. Puis en pratiquant de la sorte pour toutes les directions de l'espace, je crée une infinité de droites projectives. Celles-ci une fois jointes, enveloppent un plan projectif.

1.3. **Génération à partir d'un anneau de Möbius.** Il est possible de rendre compte du plan projectif également d'une autre façon. Pour cela il faut partir d'un anneau de Möbius dont le bord serait en fil de fer et la surface faite d'un grand nombre d'élastiques tendus comme cela est présenté figure 3. Par les déformations continues des figures 4 page ci-contre, 5 page suivante et 6 page ci-contre on atteint la forme de la figure 7 page 6.

En imaginant une infinité d'élastiques formant ainsi un plan, un **F** se retrouve tête-bêche et en miroir quand il évolue le long d'un diamètre. Je peux suturer un disque sur le cercle de la figure 7 page 6. Ce disque est figuré par la portion de plan qui sépare le cercle et le cadre du dessin. Quand le **F** parcourt le disque il ne peut plus se superposer à la forme précédente.

La surface suturée est un plan projectif, la surface à un bord est un anneau de Möbius qui peut ensuite être présentée en *cross-cap* comme dans la figure 9 page 9[3].

[2] Ce terme a pour synonyme *unilatère* quand on parle de surfaces.

[3] Il s'agit en fait plus précisément d'un *cross-cap* complété.

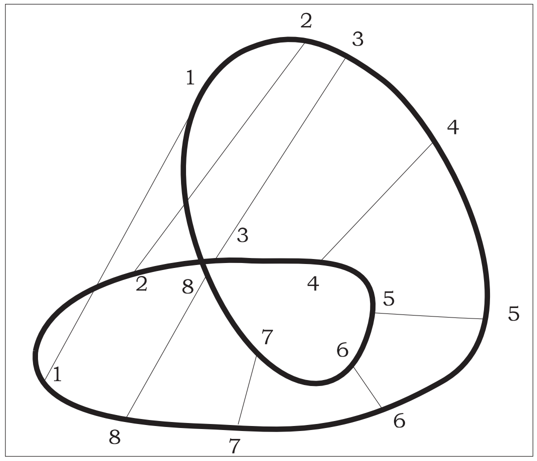

FIGURE 4. Étirement du bord

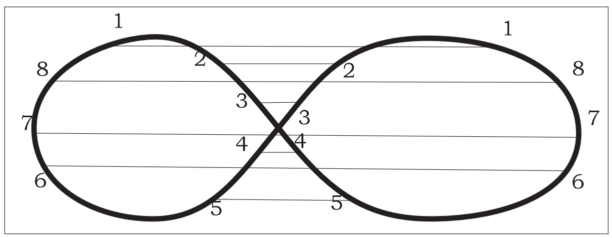

FIGURE 5. Mise à plat

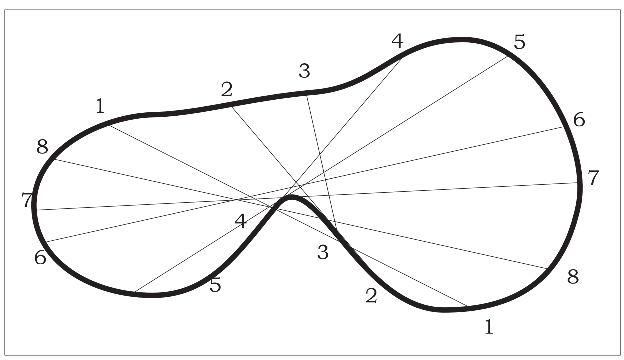

FIGURE 6. Retournement du coté droit

Cette construction est décrite dans l'ouvrage de Stephen Barr *Experiments in Topology*. [Bar89, pp 80–82]

1.4. **Génération par projection centrale ou gnomonique.** Lorsqu'un pilote d'avion veut aller d'un endroit à l'autre de la terre, il doit établir un itinéraire. S'il n'a pas besoin de faire d'escale, il va choisir le chemin le plus court car il consommera moins de carburant. S'il prend une carte aérienne ordinaire[4], et qu'il trace une droite, et bien il ne choisira pas la route la plus courte.

[4]Projection conique conforme de Lambert

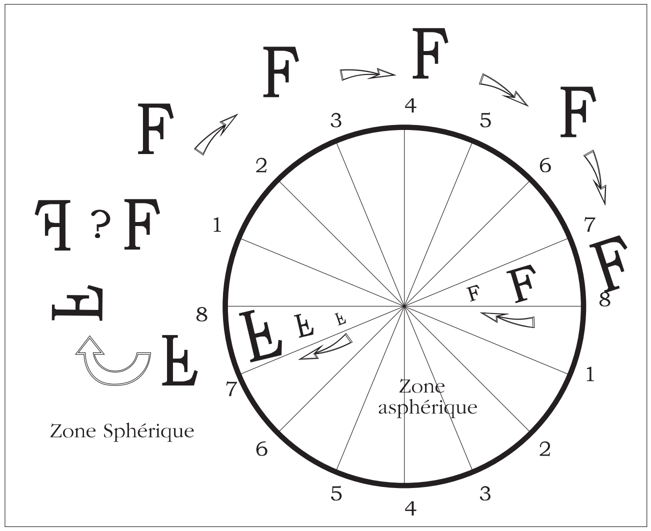

FIGURE 7. *Cross-cap* complété par une pastille

En général une droite sur une carte ne suit pas le chemin le plus court sur le terrain. Le chemin le plus court pour aller d'un point à un autre de la terre — ou de toute surface courbe — est ce qui s'appelle une *géodésique* ou un *grand cercle*.

Il serait plus simple pour ce pilote de disposer d'une projection dans laquelle une géodésique se présente sous la forme d'une droite sur la carte. Cette projection existe, elle s'appelle *la projection azimutale gnomonique*. Derrière ce nom se cache tout simplement la figure qu'on obtient en projetant une sphère sur un plan en prenant comme centre de projection le centre de la sphère. Dans cette projection chaque grand cercle apparaît comme une droite du plan. Chaque droite est une droite projective.

Pour rendre sensible cette réalité, imaginez-vous installé au centre d'une sphère transparente, sur laquelle sont dessinés de nombreux grands cercles (des méridiens entre autres). Tous ces cercles sont centrés sur le centre de la sphère; si je suis sur ce centre je les verrai comme des droites. Ils se projetteront comme tels sur un plan.

Je n'en dirai pas plus sur ce point, observez la figure 8 page ci-contre. Pour ce qui nous intéresse, il suffit de se rappeler que ces cartes sont des portions de plan projectif.

1.5. **En résumé.**

- La *droite projective* est une droite du plan euclidien complétée par un point appelé *point projectif*.
- Le *plan projectif* est un plan de l'espace euclidien complété par une *droite projective*.
- Toutes les droites parallèles du plan se coupent en un point projectif.
- Tous les plans parallèles de l'espace se coupent le long d'une droite projective.
- Tous les points projectifs d'un plan sont les points d'une droite projective.

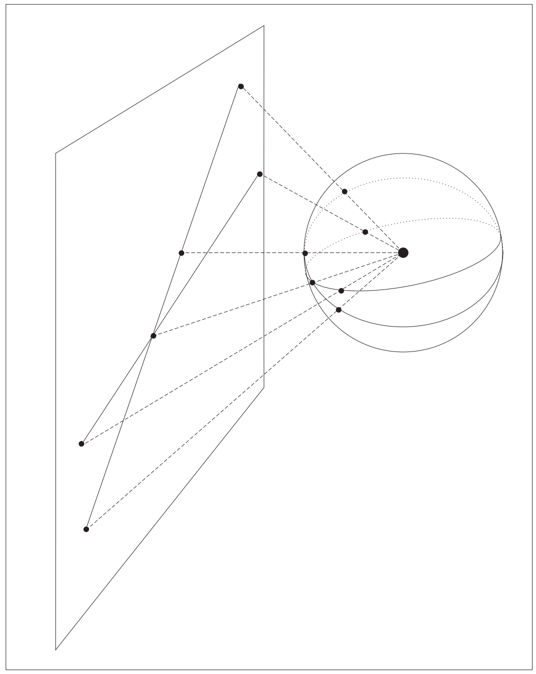

FIGURE 8. Projection gnomonique d'une sphère

- Toutes les droites projectives de l'espace sont les droites d'un plan projectif.
- Le plan projectif est une surface non-orientable.

Un peu plus formellement, on peut dire:

- Soit le plan affine $\mathcal{E}_2$ muni d'une origine O.
  Tous les points alignés du plan constituent une classe qu'on appelle *point projectif.*
  L'ensemble des classes est la *droite projective.*
- Soit l'espace affine $\mathcal{E}_3$ muni d'une origine O.
  Tous les points alignés de l'espace constituent une classe qu'on appelle *droite projective.*
  L'ensemble des classes est le *plan projectif.*

2. Présentations du plan projectif

Maintenant que quelques définitions et propriétés ont été données, il s'agit d'examiner les façons dont on peut présenter le plan projectif sur un tableau ou une feuille de papier.

Le problème est complexe. En effet le plan projectif est une surface sans bord; il en est de même pour la sphère. Mais alors que la sphère est bilatère — un ballon peut être rouge à l'extérieur et vert à l'intérieur —, le plan projectif est unilatère (ou non orientable). Par exemple le 'puits' central de la figure 7 page précédente n'est pas représentable dans notre espace, chaque morceau de surface s'interpénétrant telle une blague à tabac possédant un nombre infini de plis.

Cette surface étant sans bord, elle n'a donc, par définition, pas de trou. C'est une surface continue. Mais cette surface continue ne peut pas être représentée dans un espace à trois dimensions. Il en faut quatre pour plonger un plan projectif. Ces quatre dimensions ne sont pas nécessairement toutes spatiales; j'ai montré ailleurs [Sib95] comment le temps pouvait faire office de quatrième dimension en plus des trois usuelles.

Si les quatre dimensions sont spatiales, comment représenter un plan projectif? Ce qui n'est pas plongeable, peut être parfois immergeable. Ici c'est le cas. Nous avons un problème similaire lorsque nous représentons un objet à trois dimensions sur un plan. Cet objet se projette sur le plan. Par exemple dans la figure 5 page 5, le croisement en 'X' au milieu de ce qui ressemble à un '8' n'existe que dans la projection sur le papier. Les deux branches du 'X' ne s'interpénètrent pas, l'une est au-dessus de l'autre. C'est un effet de la projection de $\mathcal{R}^3$ sur $\mathcal{R}^2$. Ce croisement est virtuel.

Que ce passe-t-il quand j'immerge un plan projectif de $\mathcal{R}^4$ dans $\mathcal{R}^3$? Et bien il y a des phénomènes de *croisements virtuels* de surfaces. Les surfaces semblent se croiser en s'interpénétrant alors qu'elles n'ont en fait aucun point commun. Lors de construction du plan projectif avec l'anneau de Möbius, les élastiques ne se pénètrent pas, ils se côtoient.

Ainsi dans les présentations qui vont suivre, quand deux plans se coupent il est important de bien distinguer *l'intersection réelle* de deux surfaces possédant une ligne commune et *l'intersection virtuelle* de deux surfaces n'ayant aucun point commun. Dans ce cas elles semblent se couper mais c'est un effet de perspective. Ainsi les singularités ponctuelle de la figure 10 page suivante et linéaire de la figure 9 page ci-contre sont des intersections virtuelles sans réalité physique.

2.1. **Plan projectif en *Cross-cap*.** Il s'agit de la présentation de la figure 9 page suivante. C'est celle que Jacques Lacan utilise le plus souvent. De nombreux exemples de ce mode de projection se trouvent dans l'ouvrage de George K. Francis, *A Topological Picturebook*, c.f. [Fra87, Hors texte p 16] notamment. Il peut être généré en suturant un disque sur un anneau de Möbius. Ces déformations successives sont très bien décrites dans l'ouvrage de Jean Michel Vappereau, *Étoffe* [Vap88].

2.2. **Plan projectif à singularité ponctuelle.** C'est la présentation de la figure 10 page ci-contre. On peut le considérer comme une élévation de la figure 7 page 6.

2.3. **Surface de Boy.** C'est une forme très complexe, il est difficile de la représenter en deux dimensions car là la double projection $\mathcal{R}^4 \mapsto \mathcal{R}^3 \mapsto \mathcal{R}^2$ est assez désastreuse pour la compréhension de la structure. Une série de présentations se trouvent dans l'article de Bernard Morin et Jean-Pierre Petit *Le retournement de la sphère* [MP79]. Le lecteur trouvera également une tentative dans la figure 11 page 10. Cette surface de Boy est éclatée en deux parties. Pour des raisons un peu longues à décrire, la surface de gauche est topologiquement un anneau de Möbius et celle de droite, un disque. Ceci est conforme avec ce qui vient d'être dit sur le plan projectif en *Cross-cap*.

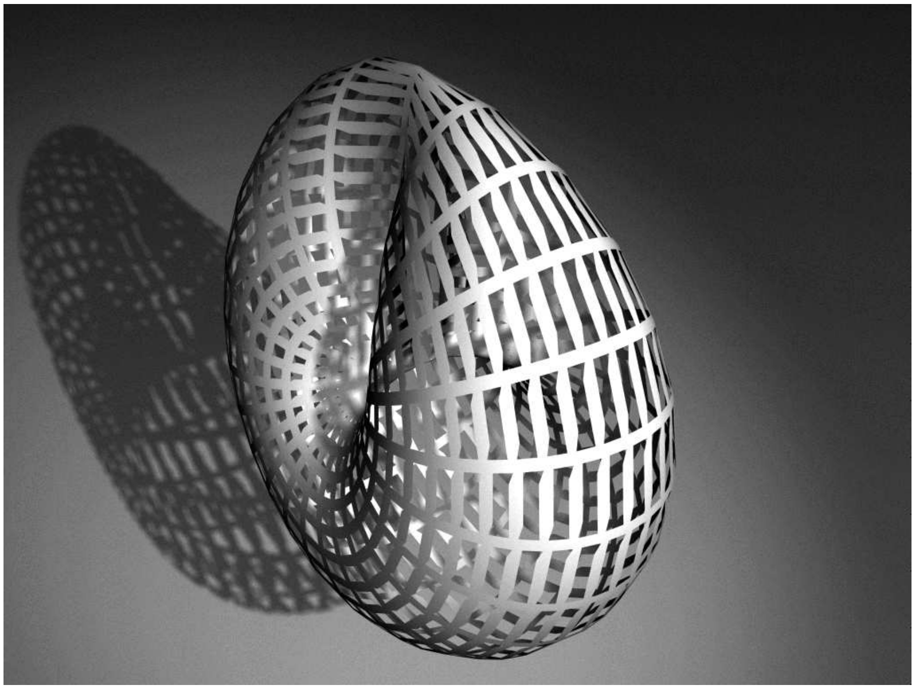

FIGURE 9. Plan projectif à singularité linéaire

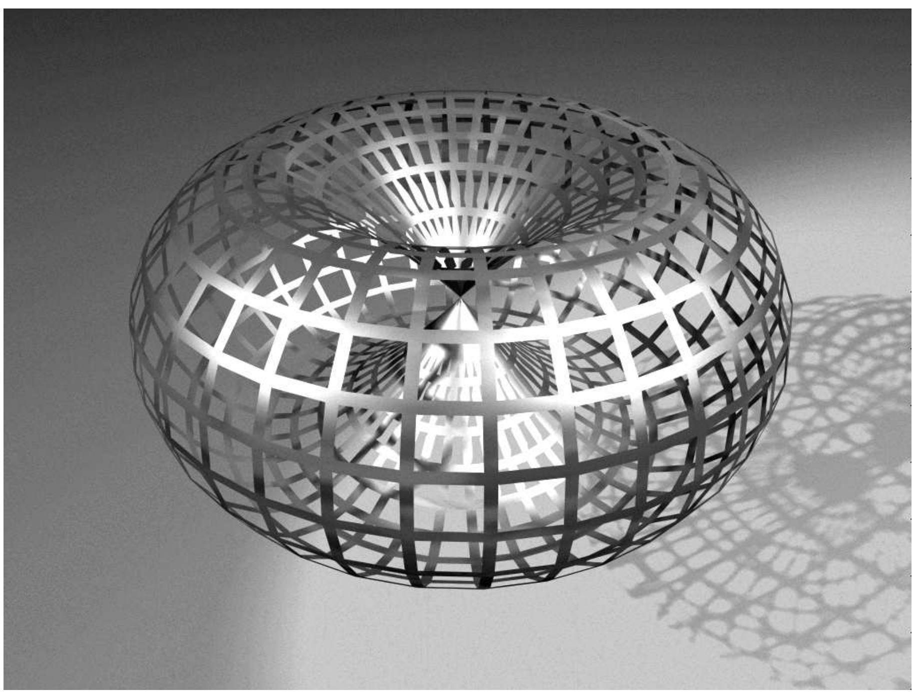

FIGURE 10. Plan projectif à singularité ponctuelle

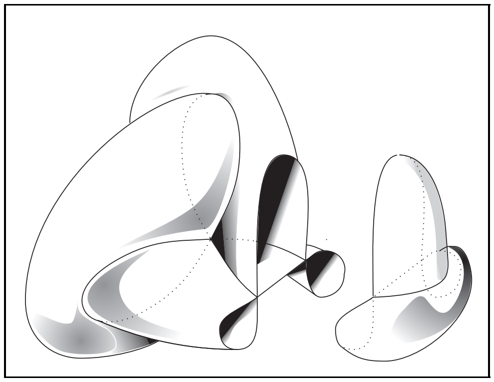

FIGURE 11. Surface de Boy

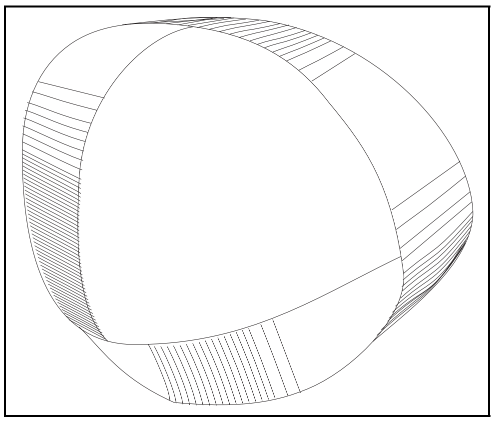

FIGURE 12. Anneau de Möbius

2.4. **Plan projectif dégradé en anneau de Möbius.** Comme on vient de le voir, la représentation du plan projectif dans l'espace 3D est largement non triviale. Ceci limite les usages graphiques qu'on peut en faire.

Y a-t-il une dégradation acceptable de la surface qui permettent de la manipuler dans l'espace 3D? Une réponse est fournie par l'anneau de Möbius.

En effet si je découpe un disque dans le plan projectif je crée deux structures, le disque que je viens de découper et une surface encore unilatère pourvue d'un bord.

Une surface unilatère à un seul bord est, par définition *un anneau de Möbius*[5].

Ainsi, tant qu'on ne se préoccupe pas du bord de l'anneau de Möbius, il est identique de raisonner sur un plan projectif et sur un anneau de Möbius. Celui-ci est plongeable dans l'espace $\mathcal{R}^3$. On peut le projeter facilement sur $\mathcal{R}^2$ en respectant les effets de "dessus-dessous". La figure 12 montre un tel anneau.

[5] À condition, ce qui est le cas, de n'avoir pas de trou extrinsèque. Ceci le différencie de la bouteille de Klein percée.

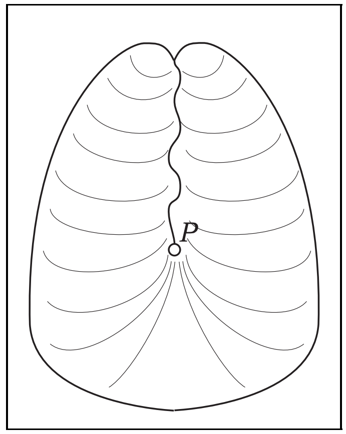

FIGURE 13. *cross-cap* complété

Le choix de travailler avec cet anneau en lieu et place du plan projectif est explicite chez Lacan notamment dans le séminaire sur l'Identification[6] [Lac62, 16 mai p 229]:

> Une surface de Möbius est l'illustration la plus simple du *cross-cap*.

3. Les usages lacaniens du plan projectif

Les usages que fait Lacan du plan projectif sont très nombreux et variés, je ne pourrai donc dans ce cadre que survoler quelques cas. Posons d'abord quelques termes et définitions que donne Lacan de parties du plan projectif.

Le trou courant d'air: correspond au trou central du tore; ce “trou” qui est tout à l'extérieur. [Lac62, 23 mai p 238]

L'objet a**:** se tient dans le trou courant d'air, cerné par une coupure. [Lac62, 23 mai p 238]

La place du trou: c'est le nom que Lacan donne au plan projectif. [Lac62, 23 mai p 239]

Le phallus: se tient dans la singularité ponctuelle de la figure 10 page 9 ou dans la base de la singularité linéaire de la figure 9 page 9. On le retrouve en P sur la figure 13. Ce point cristallise la rencontre de tous les points antipodaux du plan projectif.

Le phallus est à prendre comme la fonction Φ qui permet à l'objet a d'aller occuper la place au centre du tore, $\Phi(a)$. [Lac62, 23 mai p 239]

La chaîne signifiante: est à la fois la ligne temporelle de l'assemblage diachronique des signifiants, *et la ligne de coupure* qui change la structure du plan projectif pour en faire une surface bilatère — ou orientable [Lac62, 30 mai p 245]. C'est la fameuse *ligne sans points* de Lacan.

Pour la surface dégradée que constitue l'anneau de Möbius, c'est la ligne de coupure longitudinale pratiquée sur la figure 14 page suivante. Celle-ci permet de reconstituer par couture une bande (resp. un plan projectif) bilatère. Cette ligne est *une droite projective*.

[6] La plupart des développements sont issus de ce séminaire de 1961–1962 car c'est la première année où Lacan introduit et explicite le plan projectif.

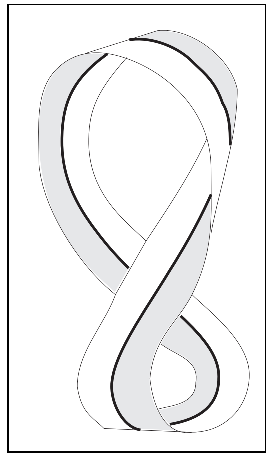

FIGURE 14. Anneau de Möbius coupé/suturé

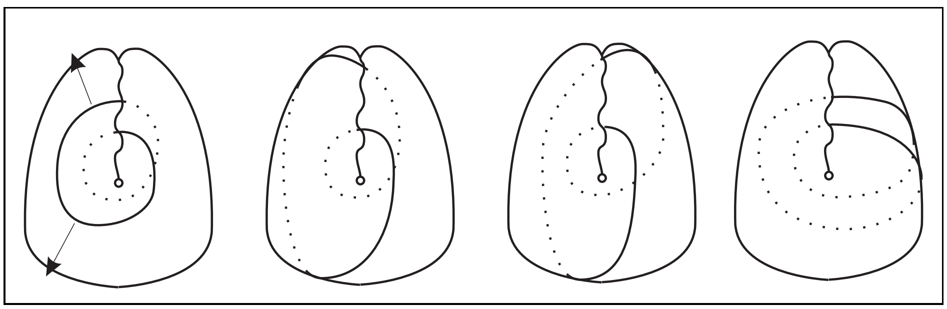

FIGURE 15. Glissement du huit intérieur

Le fantasme: je le comprends, en tant que $\$$ *coupure de* a, comme la coupure engendrée autour de la singularité centrale, ce que Lacan note ($\$ \diamond a$). le $\diamond$ correspond ici à la coupure.

Usage du Huit intérieur: est toujours à comprendre comme possédant au centre de cette singularité.

Pour ce qui est des usages, il me paraît utile de partir de la transformation que Lacan fait subir à un *huit intérieur* inscrit sur un plan projectif [Lac62, 6 juin, pp 264–267]. La succession des glissements du bord du huit intérieur visible sur la figure 15 montre l'identité de structure entre ce huit et un anneau de Möbius. De plus, cette coupure induite par l'anneau produit deux objets, un disque (bilatère donc) et un anneau de Möbius (unilatère).

Il me faut aussi indiquer dès à présent ce à quoi je veux parvenir. Je veux arriver à trois des schémas fondamentaux des *Écrits*. Il s'agit du schéma R [Lac66, p 553], qu'on trouvera reproduit figure 16 page suivante, du schéma L [Lac66, p 53], reproduit figure 17 page ci-contre et du schéma I [Lac66, p 571], reproduit figure 18 page suivante[7].

Pour ce qui va suivre, il faut bien garder en mémoire qu'il suffit de parvenir à un anneau de Möbius pour satisfaire aux conditions du plan projectif. Étant donné qu'un anneau de Möbius est un plan projectif percé, il suffit

[7]Les transformations nécessaires à celui-ci n'ont pas été incluses pour ne pas surcharger trop l'exposé.

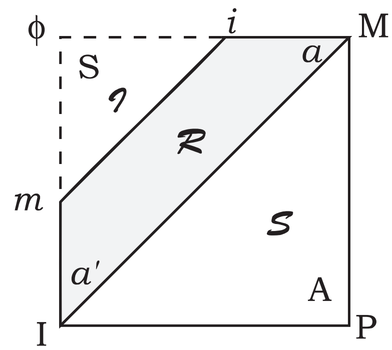

FIGURE 16. Le Schéma R

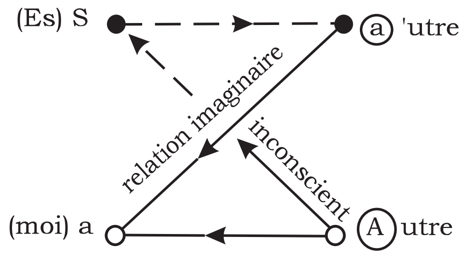

FIGURE 17. Le Schéma L

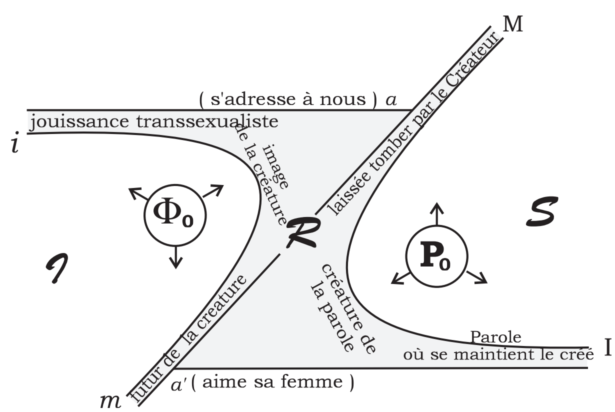

FIGURE 18. Le Schéma I

chaque fois que cela est nécessaire de "boucher" ce trou par une pastille pour retrouver le plan projectif de départ.[8]

3.1. **La lettre 52 à Fliess.** Dans la célèbre lettre 52 à Fliess, Freud donne le graphe de la dialectique des identifications. Celui-ci est reproduit figure 19 page suivante.

- P désigne la perception,

[8]Les raisonnements et schémas qui suivent sont largement inspirés de la démarche de Jean Michel Vappereau dans [Vap88].

FIGURE 19. Le schéma de la lettre 52

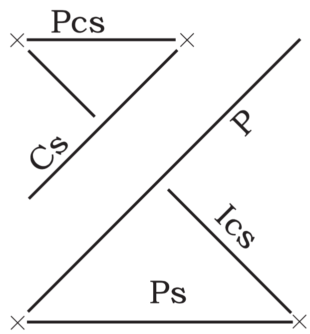

FIGURE 20. Le schéma de la lettre 52 replié

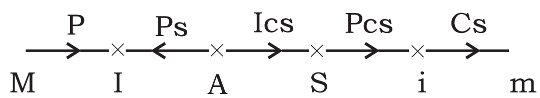

FIGURE 21. Le schéma de la lettre 52 orienté

- *Pcs* désigne la perception-signe,
- *Ics* désigne l'inconscient,
- *Pcs* désigne le préconscient et
- *Cs* désigne le conscient.

Rien ne s'oppose à ce que je replie ce schéma pour qu'il se présente comme un graphe qui serait intermédiaire entre le schéma R et L. Cela donne le schéma de la figure 20. Les informations orientées données par Lacan dans le schéma L permettent, à rebours d'orienter le schéma de Freud. Cela apparaît dans le schéma 21.

3.2. **Le Schéma F.** À Partir de cela, je peux enrichir le schéma R en y reportant le graphe de Freud orienté. Nous le nommons schéma F. Il est représenté figure 22 page suivante.

3.3. **Constitution de l'anneau F.** Comment passer du Schéma F à un anneau de Möbius exploitable? La réponse tient dans trois transformations.

La première consiste simplement à faire tourner le schéma F de 45^0 dans le sens anti-horaire. Le résultat de cette rotation apparaît dans le schéma 23 page ci-contre.

Ceci étant fait, il faut imaginer que ce schéma est fait d'une lame de caoutchouc. Comme tel je l'allonge autant que nécessaire comme on peut le voir sur la figure 24 page 16.

Une fois allongé, je peux pratiquer la troisième transformation. Il s'agit de coller ensemble le haut et le bas de la bande pour en faire un anneau de Möbius. Pour ce faire il suffit de mettre en contact le point M avec le point

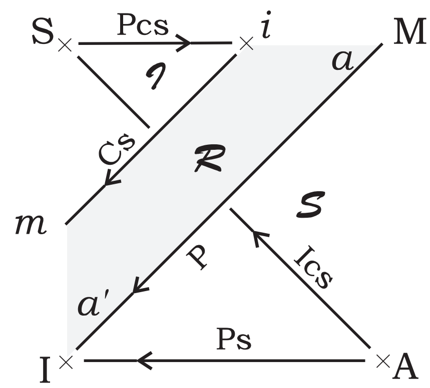

FIGURE 22. Le schéma F replié

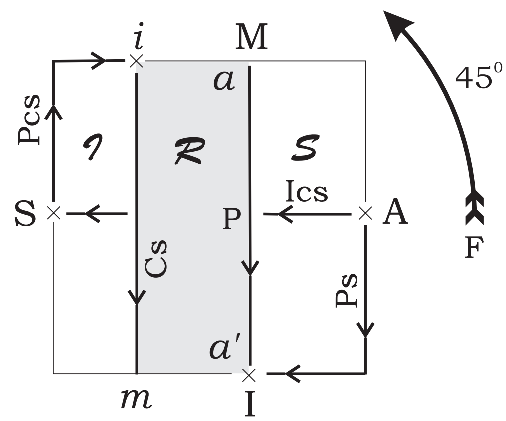

FIGURE 23. Le schéma F tourné

m et le point i avec le point I et de coller. Le résultat apparaît figure 25 page 16.

Comme on peut le constater, cet anneau est composé de deux parties:

- une partie centrale composée d'un anneau de Möbius, et comme tel unilatère, représentée en gris;
- une partie périphérique bilatère, ici représentée en blanc; mais celle-ci pourrait être de deux couleurs différentes.

3.4. **Le schéma F porté sur le plan projectif.** La dernière étape est la plus délicate à rendre sensible. Il s'agit de compléter l'anneau F par un disque pour en faire un plan projectif. Pour cela on suture le bord extérieur de l'anneau à la circonférence d'un disque. L'orientabilité ne change pas puisqu'on suture la partie bilatère de l'anneau à un disque lui même bilatère. Le résultat de cette opération — irréalisable dans l'espace 3D — est montré figure 26 page 17. On remarquera que le point S et le point A venant dans le même voisinage peuvent être confondus.

De ce fait plusieurs cycles apparaissent. Mais l'un d'entre eux est interrompu par la bande $\mathcal{R}$. Ce qui part de A ne peut pas atteindre S.

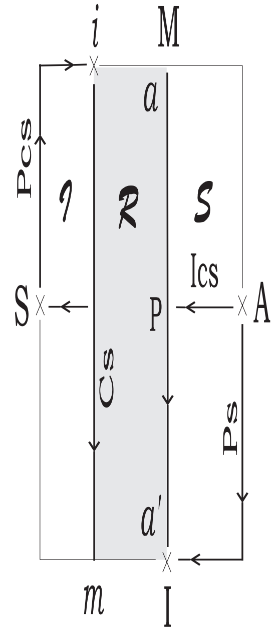

FIGURE 24. Le schéma F tourné, étiré

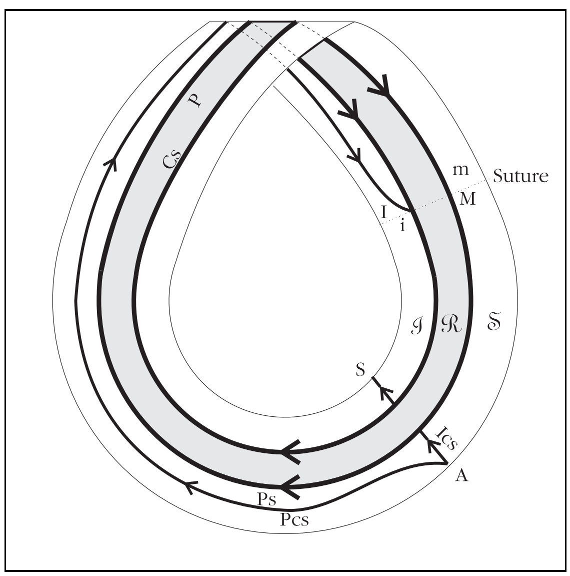

FIGURE 25. Le schéma F en anneau

3.5. **L'anneau à partir du schéma L.** Ces transformations réalisées, il est facile de les transposer au schéma L. C'est un schéma qui figure *l'involution signifiante*. Comme telle c'est de l'involution de la bande $\mathcal{R}$ qu'il s'agit. Lorsque la bande $\mathcal{R}$ se réduit les deux pseudo-bords diminuent de largeur jusqu'à se collaber pour s'immerger l'un dans l'autre pour ne former plus

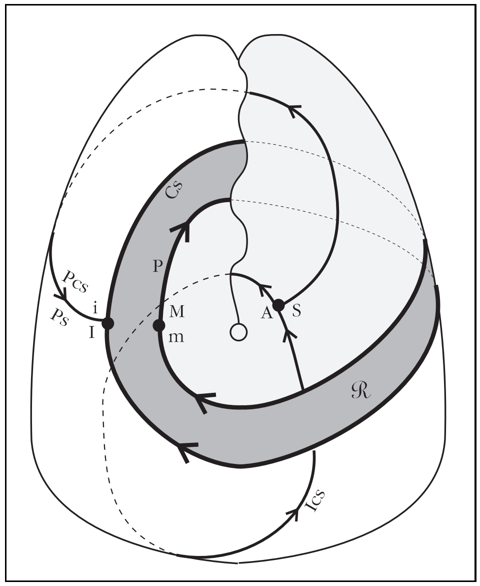

FIGURE 26. Le schéma F en plan projectif

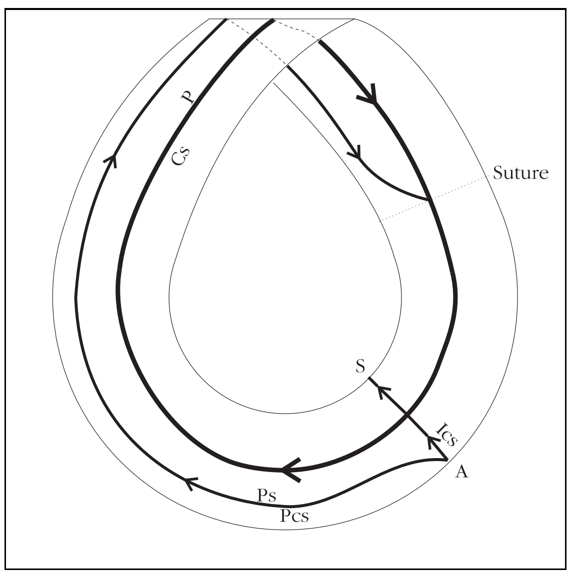

FIGURE 27. Le schéma L en anneau

qu'une droite projective, *une ligne sans points*. L'anneau que cela produit est montré figure 27 page ci-contre.

3.6. **Le plan projectif L.** Cet anneau complété de la même façon que pour le schéma F produit la figure 28 page suivante. Là il est notable que les circuits ne sont plus interrompus par la bande R. Cela figure bien ce qu'il en est de l'involution signifiante.

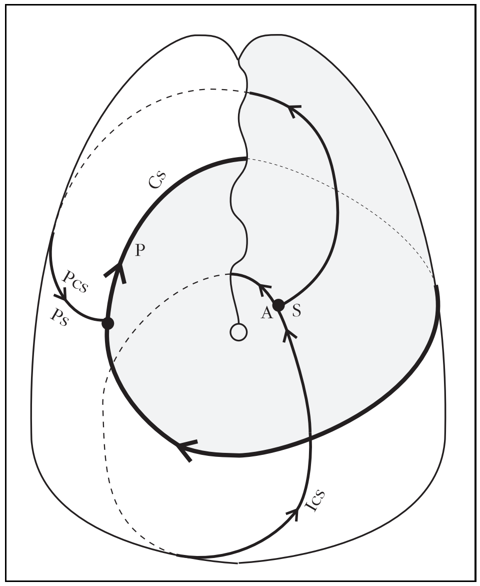

FIGURE 28. Le schéma L en plan projectif

REFERENCES

[Bar89] S. Barr. *Experiments in Topology.* Dover, New York, 1989. Reprint Crowell, New York, 1964.

[Fra87] G. K. Francis. *A topological Picturebook.* Springer-Verlag, New York, 1987.

[Lac62] J. Lacan. L'identification. Notes de cours collectives, texte établi en 1994, 1961-62. Le Séminaire, Livre IX.

[Lac66] J. Lacan. *Écrits.* Le Seuil, Paris, 1966.

[MP79] B. Morin and J.-P. Petit. Le retournement de la sphère. *Pour la Science*, jan 1979.

[Sib95] J. Siboni. Génération temporelle du plan projectif. *La Lettre de Topologie*, may 1995.

[Ste94] I. Stewart. Les plans projectifs finis. In *Visions géométriques*, pages 87–96. Pour la Science, Belin, Paris, 1994.

[Vap88] J.-M. Vappereau. *Étoffe.* Topologie en Extension, Paris, 1988.

8, PASSAGE CHARLES ALBERT, 75018 PARIS, FRANCE
E-mail address: `jacsib@Lutecium.fr`